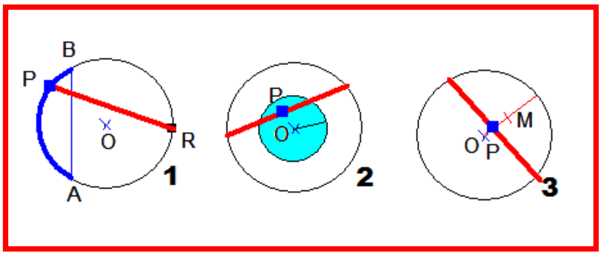
Paradoxes probabilistes: D'un univers à l'autre.

Imaginez Marcelo Mastroianni avec son savoureux accent italien, dans "Une journée particulière" :

"Ma non, monsieur, ce n'est pas le locataire du sixième qui est antifasciste. Ce sont les fascistes qui sont anti-locataire du sixième."

La chasse aux paradoxes probabilistes est ouverte.
Commençons par le paradoxe de Bertrand.



Soit un cercle de centre O et de rayon r.
Les côtés du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle ont pour longueur $a = r\sqrt{3}$.
En 1889 Joseph Bertrand s'étonnait de ce que le calcul de la probabilité de tirer au hasard, dans ce cercle, une corde de mesure plus grande que a puisse donner 3 résultats différents, tous paraissant mathématiquement corrects.

1) On prend un point R n'importe où sur le cercle.
À partir de R, divisons le cercle en 3 arcs égaux $\widehat{RA}$, $\widehat{RB}$, $\widehat{AB}$, de mesure $\frac{2\pi r}{3}$. RA et RB sont les côtés d'un triangle équilatéral inscrit. Tirons maintenant un point P au hasard sur le cercle. Pour que la corde RP soit plus grande que a il faut que P appartienne à l'arc $\widehat{AB}$. Donc dans ce cas la probabilité cherchée est $\frac{\text{mesure de l'arc } \widehat{AB}}{2\pi r} = \frac{1}{3}$.

2) Si on prend un point P (différent de O) n'importe où à l'intérieur du disque, il existe une corde et une seule telle que P soit son milieu. Donc tirer un point P à l'intérieur du disque revient à tirer une corde au hasard. Soit le disque de centre O et de rayon $\frac{r}{2}$.
Si on tire le point P au hasard à l'intérieur de ce disque, la corde associée sera plus longue que a. Sinon elle sera plus petite.
Donc la probabilité cherchée est $\frac{\text{aire du disque } (O,\ \frac{r}{2})}{\text{aire du disque } (O,\ r)} = \frac{1}{4}$.

3) Si on prend un point P (différent de O) au hasard sur un rayon donné du cercle il existe une corde et une seule telle que P soit son milieu. Donc tirer un point P sur ce rayon revient à tirer une corde au hasard. Soit M le milieu de ce rayon. $OM = \frac{r}{2}$.
Si P est sur OM, la corde sera plus longue que a . Si P est extérieur à OM la corde sera plus petite que a.
Donc la probabilité cherchée est $\frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$.

Alors, quelle est la probabilité de tirer une corde plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ? $\frac{1}{2}$? $\frac{1}{3}$? $\frac{1}{4}$?

Avant de régler son sort à ce paradoxe, faisons une petite incursion dans l'axiomatique des probabilités dont Kolmogorov a édicté les règles en 1933.

L'axiomatique.

Que Kolmogorov ait estimé nécessaire de mettre de l'ordre et de définir ce qu'on pouvait appeler "probabilité" au sens mathématique par opposition au sens intuitif que nous avons de ce concept n'était pas inutile si on en juge par les abus et sacrilèges de toutes sortes qu'on commet encore aujourd'hui au nom de cette science.

Kolmogorov nous explique qu'au sens mathématique, toute expérience aléatoire a pour cadre un ensemble qu'on appelle "Univers" et qu'on note Ω. Cet ensemble est formé de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire.

L'univers peut être découpé en sous ensembles d'une ou plusieurs issues. Une famille des ces sous - ensembles constitue une tribu sur l'univers si elle possède les propriétés suivantes:
1) l'Univers Ω et l'ensemble vide ∅ font partie de cette famille.
2) le complémentaire de tout sous – ensemble de cette famille appartient à la famille.
3) toute réunion d'un nombre fini de sous ensemble de cette famille appartient à cette famille.

Si l'on sait mesurer (au sens mathématique) tous ces sous ensembles, on peut définir une probabilité sur la tribu.
La probabilité d'un sous ensemble A que l'on note P(A) est égale au rapport $\frac{\text{mesure de A}}{\text{mesure de }\Omega}$.
Cette définition donne à la probabilité le statut d'une mesure comprise entre 0 et 1.
Notons que l'on parle de la "probabilité d'un ensemble" et que cet ensemble porte le nom d'"évènement".
Un évènement est donc un ensemble d'issues.
De la définition de la probabilité en tant que mesure on tire plusieurs propriétés dont les plus triviales sont :
Si A est un évènement on a $P(A) \in [0 ; 1]$,
$P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$,
Si $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans on a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
Si A et B sont 2 sous – ensembles disjoints de la tribu on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Si A et B (2 sous – ensembles de la tribu) ont une intersection on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

En règle générale, les issues sont dotées de caractères qualitatifs ou quantitatifs déclinés en plusieurs modalités.
Par exemple le caractère couleur est décliné en "bleu", "blanc", "rouge", le caractère forme est décliné en "rond", "carré", triangle", le caractère nombre inscrit sur un dé est décliné en 6 modalités {1;2;3;4;5;6}. Etc …
Il est fréquent qu'à chaque modalité corresponde un sous ensemble de la tribu (un évènement) et on peut définir des modalités composites telles que "triangle ET bleu", "multiple de 3 OU pair", "NON carré" en les associant avec des locutions logiques. À chaque locution logique correspond une opération sur les évènements correspondants.
Au ET correspond l'intersection, au OU correspond la réunion, au NON correspond le complémentaire dans Ω.

Quand l'univers Ω est fini, dénombrable et formé d'éléments équiprobables devant l'expérience aléatoire, l'ensemble des parties de Ω (Ω et ensemble vide inclus) constitue une tribu sur Ω. Et le nombre d'éléments de chaque partie en constitue une mesure au sens mathématique. C'est un cas qu'on rencontre fréquemment et dans ce cas, la probabilité de l'évènement A est
$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega}$.
Quand l'univers est infini mais borné et mesurable comme un cercle, un disque, un segment de droite, la probabilité de l'un de ses points est nulle mais il suffit de définir une tribu à partir de sous ensembles mesurables pour qu'on puisse évaluer leur probabilité par comparaison de leur mesure avec celle de l'univers.
Par exemple si Ω est un segment de droite, les segments de droite et réunions de segments de droite inclus dans Ω sont mesurables et constituent une tribu.
Sur un cercle univers on prendra les arcs de cercles et réunions d'arcs de cercles dont on sait évaluer la longueur.
Ou bien la tribu des disques et couronnes circulaires (dont on sait évaluer la surface) inclus dans un disque univers.
Dans tous ces cas $P(A) = \frac{\text{mesure de A}}{\text{mesure de }\Omega}$. (mesure au sens physique ou mathématique).

L'expérience aléatoire prend souvent le nom de tirage. Il y a les tirages simples et les tirages multiples. Les tirages multiples simultanés et les tirages multiples successifs, les tirages avec remise et les tirages sans remise…
Dans le cas d'une épreuve formée de tirages multiples, l'issue d'une épreuve est constituée des résultats des tirages qui la constituent et ceux-ci peuvent être regroupés sous la forme d'une combinaison, d'un arrangement ou d'un n-uplet selon que les tirages ont lieu dans un même ensemble ou dans plusieurs ensembles (différents ou non), selon que les permutations de plusieurs tirages constituent une même issue ou non. En principe, le protocole de tirage et la description des évènements dont on veut calculer la probabilité suffisent à définir ce que l'on appelle "issue d'une épreuve" et la façon dont ces issues doivent être regroupées pour former les évènements.
Ensuite le calcul de probabilité se résout souvent à un problème de dénombrement ou de mesure.

Pour pouvoir calculer une probabilité au sens mathématique, il faut théoriquement réunir tous ces éléments, définir l'expérience aléatoire, l'univers des possibles, le procédé de mesure, sans quoi le terme de probabilité n'a pas grand sens.
Souvent les paradoxes tirent leur substance d'un manque de rigueur au niveau de la définition des pré – requis imposés par l'axiomatique.
L'univers, notamment doit être formé de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire et seulement de celles – ci.
Notons d'ores et déjà que la notion d'instant et le concept de possible sont liés. On peut définir l'instant comme un état exhaustif de l'univers au temps T. Si un évènement E constitutif de l'univers est possible à l'instant t1 et avéré à l'instant t2, on ne peut plus, à l'instant t2 prétendre calculer une probabilité à partir d'un univers où E serait encore possible.

Le paradoxe c’est Bertrand.

Le problème de Bertrand ne va pas résister longtemps à l'approche axiomatique.
Dans ce problème on ne tire pas des cordes au hasard mais des points.
L'univers est, toujours un univers de points. Selon le cas,..

- un cercle de rayon r , et on mesure la probabilité d'un de ses arcs de longueur $2\pi r/3$
- un disque de centre O et de rayon r et on mesure la probabilité du disque inclus de centre O et de rayon r/2.
- un segment OC de longueur r et on mesure la probabilité du segment OM de longueur r/2 inclus dans OC.

Dans chaque cas c'est bien la probabilité d'un ensemble qu'on mesure, ce qu'on peut traduire en langage courant par "la probabilité de tirer un point dans cet ensemble".
Un point et non une corde.
Que par la suite on fasse correspondre à ces points ou ces ensembles de points, de façon biunivoque ou univoque, des cordes, des droites, des cercles, des taux de cholestérol, des niveaux de la mer, ou tout autre objet ou concept lié à un nombre n'est qu'une question de convention.
On pourrait par exemple faire une partition du disque en 6 zones concentriques d'aires inégales, qu'on numéroterait de 1 à 6 et parler de "la probabilité de tirer un nombre de 1 à 6" en tirant au hasard un point dans ce dé original.
Il n'en reste pas moins que quand chaque cas, d'un point de vue mathématique on fait un abus de langage.
Quand on tire un point dans un univers de points découpé en sous-ensembles mesurables, c'est la probabilité de tirer un point dans un sous-ensemble que l'on calcule, autrement dit la probabilité de ce sous-ensemble et non la probabilité de tirer une corde ou un nombre, puisque la corde ou le nombre ne font partie d'aucun des sous-ensembles que nous avons définis.
Là nous cherchons la probabilité d'un disque ou d'une couronne circulaire, la probabilité d'un segment de droite situé sur un rayon donné, la probabilité d'un arc de cercle…. Visiblement aucun de ces objets n'est une corde ou un ensemble de cordes.
Pour calculer la probabilité de tirer une corde, il faut se situer dans un univers de cordes.

Maintenant, on peut toujours parler de la probabilité de tirer au hasard "sur un rayon donné, ou dans un disque, un point qui soit le milieu d'une corde plus grande que a". Ou de la probabilité de tirer, sur un cercle où se situe un point A, un point B tel que la corde AB soit plus grande que a"
Mais en aucun cas, il ne s'agit de la probabilité de tirer une corde plus grande que a.
Peut être a-t-on entretenu l'ambigüité pour l'amour du sensationnel, dont le paradoxe est une déclinaison, peut être parce qu'on a un esprit confus et qu'on n'a pas encore lu Kolmogorov dans le texte.

Le problème des 3 portes

Ce problème est beaucoup plus subtil.
Nous nous trouvons devant 3 portes identiques.
Derrière l'une d'elles on trouve un trésor, derrière les 2 autres on ne trouve rien.
Le meneur de jeu, qui sait où se trouve le trésor, nous demande de choisir une porte puis en ouvre une autre sur une pièce vide et nous demande si au final pour localiser la porte derrière laquelle se trouve le trésor, nous voulons conserver notre choix initial où choisir la 3^{e} porte, celle qu'il n'a pas ouverte.
Ce problème, initialement posé par un jeu télévisé américain (paradoxe de Monty Hall), a donné lieu à de grandes controverses pour savoir si la probabilité d'un changement opportun était $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$.

Nous allons passer en revues différents types de raisonnements mis en avant pour résoudre ce problème et les examiner selon l'approche axiomatique.

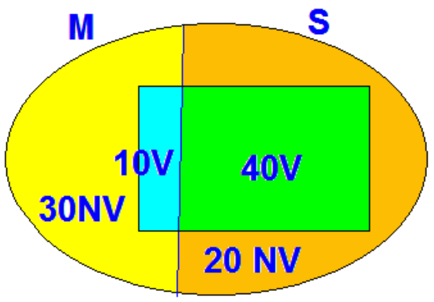
❶ Dans le premier cas, l'univers est une projection de l'esprit, c'est l'ensemble de toutes les combinaisons possibles pour les portes dotées de 2 caractères: un numéro 1,2,3 pour les différencier et un attribut bonne (B) ou mauvaise (M) selon qu'elles cachent ou non le trésor.   Dans ce cas, l'univers, dont tous les éléments sont équiprobables, est
{**(1B,2M,3M)**; **(1M,2B,3M)** ; **(1M,2M,3B)**}
C'est l'univers initial, formé de toutes les possibilités. L'un de ces évènements est le bon.
C'est un univers "passif" dont la constitution est indépendante de l'attitude des acteurs.
Quand on a jeté notre dévolu sur la porte 1 et que le meneur de jeu dévoile la porte 2 (2M) on utilise les probabilités conditionnelles: probabilité de 1B quand 2M est réalisé et dans cet univers, on trouve $\frac{1}{2}$.
On obtient le même résultat en restreignant l'univers aux possibles quand on connait 2M puisque cet univers devient {**(1B,2M,3M)**; **(1M,2M,3B)**} et dans cet univers la probabilité de 1M (ou 1B) est $\frac{1}{2}$.
On trouverait la même probabilité quel que soit notre choix initial et la porte ouverte.

❷ Certains raisonnent en passant en revue tous les cas possibles et en s'interrogeant sur l'issue du changement qui peut être bon ou mauvais .
En supposant qu'on ait choisi la porte 1, toutes les possibilités sont
(1B,2M,3M) → Changement mauvais
(1M,2B,3M) → Changement bon
(1M,2M,3B)→ Changement bon
Il y a donc 2 possibilités pour que le changement soit bon et 1 seule pour que le changement soit mauvais.
La probabilité de "changement bon" est donc $\frac{2}{3}$.
Voyons un peu maintenant quel est l'univers qui permet de calculer cette probabilité: on y trouve toutes les combinaisons de portes dotées des modalités "bonne" ou "mauvaise". Mais l'une de ces combinaisons est **(1M,2B,3M)** ce qui prouve qu'il s'agit de l'univers avant qu'on ouvre la porte 2 et qu'on la dévoile mauvaise. Or ce n'est pas la probabilité à cet instant qu'on vous demande de calculer (dans cet univers tout le monde est d'accord pour dire qu'on a 2 chances sur 3 d'avoir choisi la mauvaise porte) mais la probabilité un instant plus tard, après que nous ayons appris que la porte no 2 était mauvaise.
Donc la probabilité que vous calculez n'est 2/3 que parce qu'il existe dans votre univers un évènement qui n'a pas à y être au moment où se pose le problème.
Si notre univers se réduit aux possibles au moment où se pose le problème:
{(1B,2M,3M); (1M,2M,3B)}
On retombe sur le cas précédent puisque le changement n'est bon qu'une fois sur deux.
Les problèmes de compatibilité de l'univers avec l'instant sont souvent éludés en matière de probabilités et pourtant il est incorrect (et même illogique) de construire un univers des possibles qui ne serait pas compatible avec l'instant.

❸ Dans le 3e cas, on utilise les probabilités composées et la loi de Bayes.
Supposons que la porte 1 soit le choix initial (fréquence 1/3), et notons "o" la modalité "ouverte". Le meneur de jeu ouvre obligatoirement la porte 2 ou 3 si 1M (fréquence 1) et aléatoirement la porte 2 ou la porte 3 si 1B (fréquence ½).
Dans l'ensemble des épreuves où la porte 1 a été choisie, on peut avoir, en fonction de la configuration des 3 portes :
(**1B**,2M,3M) et **2o** (fréquence $\frac{1}{3}\mathrm{x}\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$)
(1B,2M,3M) et 3o (fréquence $\frac{1}{3}\mathrm{x}\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$)
(1M,2B,3M) et 3o (fréquence $\frac{1}{3}\mathrm{x}1=\frac{2}{6}$)
(**1M**,2M,3B) et **2o** (fréquence $\frac{1}{3}\mathrm{x}1=\frac{2}{6}$)
On en déduit qu'il y a 2 fois plus d'épreuves (fréquence $\frac{2}{6}$ contre fréquence $\frac{1}{6}$) où la porte 2 ayant été ouverte (2o) le trésor se situait derrière la porte 3. On a donc intérêt, sur un grand nombre d'épreuves du type de la nôtre à changer de porte.
Mais ici nous nous situons visiblement dans un univers d'épreuves et pour le constituer, ainsi que pour déterminer les chiffres de fréquences qui nous sont proposés, nous avons du considérer des éventualités comme (1B,2M,3M) et 3o ou (1M,2B,3M) et 3o qui n'ont pas cours dans la réalité qui est la nôtre au moment où se pose le problème puisqu'à ce moment là, ni 3o ni 2B ne sont possibles. La probabilité de ces conjonctions devrait donc être 0 et ce n'est pas le cas dans cette argumentation.
On peut d'ailleurs prouver très facilement que les probabilité trouvées par ce procédé ne collent pas avec notre situation puisque si on ajoute la probabilité de 1 bonne et 2 ouverte $\frac{1}{6}$ et la probabilité de 1 mauvaise et 2 ouverte $\frac{2}{6}$, on ne trouve pas 1 alors que, dans notre épreuve, c'est une certitude que l'on se trouve dans l'un de ces cas de figures.
Ces probabilités ne sont ce qu'elles sont que parce qu'on se trouve dans un univers d'épreuves où la porte 2 peut être bonne et où la porte 3 peut être ouverte. N'est – il pas évident que cet univers ne peut être le nôtre?
En fait, cet univers n'existe en tant que possible qu'au moment où l'on a choisi la porte 1 avant que le meneur de jeu n'ait choisit aucune porte. A ce moment là, la probabilité qu'on ait choisit la bonne porte étant 1/3, il n'est pas étonnant qu'en se projetant dans le futur en jouant à un jeu où le meneur de jeu obéirait à un programme qui lui ferait ouvrir soit la seule porte mauvaise restante soit au hasard l'une des deux portes mauvaises restantes on trouve qu'on aurait intérêt à changer de porte 2 fois sur trois.
Mais au moment où la porte 2 a été ouverte et dévoilée mauvaise ces projections n'ont plus aucun sens.
Si l'on se trouvait avant cela dans un univers où (**1B**,2M,3M) et (**1M**,2M,3B) avaient la même probabilité, il n'y a aucune raison pour que désormais, sachant 2M, (1B, 3M) et (1M, 3B) n'aient pas la même probabilité.

Prenons un autre exemple où l'on utilise la loi de Bayes.

Un exemple fondamentalement différent.



Supposons une population de 100 personnes où 40 sont malades (M) et 60 saines (S), 50 vaccinées (V), 50 non vaccinées (NV) et où la probabilité d'être malade quand on est vacciné (M quand V) est 20%.
L'épreuve : on tire une personne, elle est malade.
Quelle est la probabilité P pour qu'elle soit vaccinée?
L'univers est la population.
L'énoncé suffit à déterminer la fréquence, autrement dit la probabilité des différents sous ensembles dans l'univers:
M et NV → 30% , M et V → 10% , S et NV → 20% , S et V → 40%
On compare M et V (10%) et M et NV (30%) et on en déduit que
P $=\frac{10}{30+10}=\frac{1}{4}=25\%$.
Et sur de nombreuses épreuves identiques, la fréquence de vaccinée si malade devrait être la même que celle qu'on calcule dans une épreuve unique: 25%.
Quelle est la différence entre cet exemple et celui des 3 portes?
Ici les fréquences ne sont plus celles avec lesquelles une conjonction de faits se produit dans un grand nombre d'épreuves.
Les fréquences sont la proportion d'une classe d'individus par rapport à l'effectif (la population) d'un ensemble concret.
Pour construire l'univers, on n'a pas besoin de recourir à des épreuves où les choses ne se seraient pas passées comme dans la nôtre. L'univers est concret et formé d'évènements dont la fréquence, autrement dit la probabilité, ne sera pas modifiée par la "complexion" du tirage.
Ici, la formulation du problème générique de type "probabilité des causes" rend les choses plus compliquées qu'elles ne le sont en réalité. On aurait pu nous demander "sachant que la nature du tirage réduit l'univers à l'ensemble des malades, quelle est la probabilité de tirer parmi eux une personne vaccinée?" ou encore "Quelle est la probabilité de tirer une personne vaccinée parmi les malades?"
Et la réponse aurait été la même 25%.
Tandis que dans le problème des 3 portes, tel qu'on l'envisage à travers la loi de Bayes, la bonne formulation aurait été "Quelle est la fréquence avec laquelle il faut changer de porte quand on participe à des épreuves dans lesquelles on a choisi la porte 1 et que la porte 2 a été ouverte?", ce qui trahit un problème de nature complètement différente.
En outre dans ce problème on a considéré arbitrairement que le meneur de jeu choisissait aléatoirement la porte à ouvrir quand la porte choisie était mauvaise alors qu'il pouvait ouvrir la première porte mauvaise dans l'ordre de la numérotation ou tout simplement consulter un bout de papier où il aurait écrit la porte à ouvrir selon la porte choisie.
Que devient la loi de Bayes si le meneur de jeu n'obéit pas au bon programme?
Donc dans le problème des 3 portes, la stratégie de choix de la porte ouverte par le meneur de jeu a une influence sur les fréquences qui structurent l'univers d'épreuves, alors que dans le dernier exemple, on se soucie comme d'une guigne du processus qui a mis la personne malade en notre présence.

D'un univers à l'autre.

Par rapport aux univers "**passifs**" constitués d'ensembles au sens banal du terme, tels que le sont une population humaine, un sac rempli de boules, les faces d'un ou plusieurs dés, un segment de droite, il existerait donc un autre type d'univers, des univers "**actifs**" constitués d'épreuves où le résultat d'une première expérience aléatoire conditionnerait la fréquence avec laquelle une deuxième expérience aléatoire agirait.
Dans le premier cas, les sous-ensembles de l'univers sont stables, exactement mesurables ainsi que les fréquences qui en découlent dans le deuxième cas, l'effectif des sous- ensembles fluctue dans le temps en fonction des aléas qui conditionnent les épreuves et, pourvu qu'on fasse confiance à la loi des grands nombres, les fréquences devraient être des limites quand le nombre d'épreuves tend ver l'infini.

Seulement voilà: pour mesurer notre probabilité, n'est – il pas abusif d'utiliser un univers où un évènement possible est que telle porte soit fermée alors qu'au moment où se pose notre problème, elle a été ouverte?
Si, l'axiomatique définit l'univers d'une épreuve aléatoire comme l'ensemble des issues auxquelles elle nous confronte, voyez-vous d'autre issue à la nôtre que 1B3M ou 1M3B ? Voyez-vous une autre issue possible après que la porte 2 ait été ouverte?
La formulation que je viens d'utiliser ne caractérise-t-elle pas avec rigueur et exactitude toutes les issues de l'univers de notre expérience aléatoire?
Et si notre univers, au moment où se pose le problème se résout à 2 issues, a-t-on le droit de spéculer sur un univers qui en contient 3 ou 4 dont certaines sont inconciliables avec le cadre fixé à notre épreuve?
Oui je sais, vous êtes choqués parce que vous avez conscience que si vous participiez à un grand nombre d'épreuves, pour assurer vos gains, il faudrait systématiquement changer de porte et vous trouvez illogique que les probabilités ne nous donnent pas le même commandement. Vous vous dites que c'est un peu comme si l'historique des épreuves chargeait d'un excès de probabilité la porte que vous n'avez pas choisi Mais on n'est pas au casino là, on parle de probabilité dans une épreuve unique et comment voulez-vous expliquer que le fait de choisir une porte et d'en ouvrir une autre modifie automatiquement la charge en probabilité au profit de la porte restante, quelle que soit la porte initialement choisie, si vous n'avez pas recours à un univers d'épreuves, alors que l'axiomatique vous l'interdit.
Du reste, au casino, les machines auxquelles vous êtes confrontés sont censées fonctionner selon des mécanismes entièrement aléatoires. Pas de dé pipé, pas de frein de roulette, pas de croupier capable de donner le tiers du cylindre.
Est-ce le cas dans l'épreuve de Monty Hall? Autrement dit peut – on dire que le candidat est confronté à une épreuve aléatoire

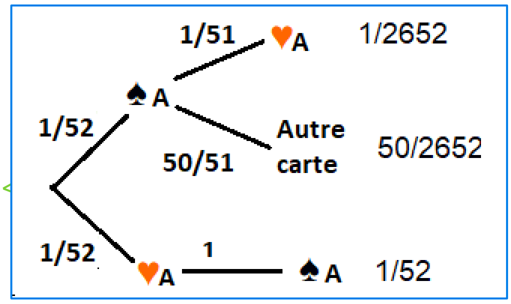
Epreuve aléatoire ?

Pour illustrer la pertinence de leur point de vue, certains comparent le jeu de Monty Hall à une épreuve où l'on demanderait au joueur de choisir une carte au hasard parmi 52.
Puis on retournerait 50 cartes qui ne seraient pas l'as de pique parmi les 51 cartes restantes et on demanderait au candidat si pour trouver l'as de pique il préfère conserver son choix initial ou changer pour l'unique carte qui n'a pas été retournée parmi les 51 cartes qu'il n'a pas choisies.

> Les probabilités sont dans ce cas de 1/52 si vous conservez votre choix initial et de 51/52 (un peu plus de 98 %) si vous modifiez votre choix, parce que vous aurez retourné en tout 51 cartes sur 52.

Evidemment le candidat effrayé par la maigreur de ses chances initiales (une sur 52) s'empresse de changer de carte. Et ceux qui utilisent cette argumentation prétendent que le changement est bon à 51 contre 1 comme l'affirme un article du monde paru sur le sujet en 2013 (encadré ci - contre).

On trouve le chiffre de 1/52 grâce au diagramme de Bayes suivant qui suppose que les 2 cartes inconnues sont ♥A et ♠A:



Ce diagramme repose sur le raisonnement suivant :
Si la première carte choisie est l'as de pique, on avait 1 chance sur 51 de choisir de ne pas montrer l'as de cœur en seconde carte.
Par contre, si c'est l'as de cœur, choisir de ne pas montrer l'as de pique est obligatoire. Donc quand l'as de cœur est la seconde carte cachée, la probabilité pour que la première carte choisie soit l'as de pique est

$$\frac{\frac{1}{2652}}{\frac{1}{2652}+\frac{1}{52}} = \frac{1}{52}.$$

Mais encore une fois, pour que cette probabilité existe, il faut se trouver dans un univers où la carte cachée n'est pas toujours l'as de cœur et cet univers n'est pas celui où l'on nous demande de calculer la probabilité. C'est un univers d'épreuves et dans cet univers 1/52 est plus une fréquence, ou plutôt la limite d'une fréquence quand le nombre d'épreuves tend vers l'infini, qu'une probabilité. Dans le cadre d'une épreuve unique, ce nombre n'offre aucun intérêt.

Notre instinct nous souffle qu'il vaut mieux changer de carte parce que notre tendance casinomaniaque prend le dessus, et qu'instinctivement, on se dit que si l'on jouait de nombreuses fois à ce jeu, il faudrait miser sur l'autre carte pour gagner le plus souvent.
Mais d'un autre côté, il devrait nous faire considérer avec méfiance ce « une chance sur 52 » car une fois que nous avons éliminé 50 hypothèses que nous pouvions faire dans l'univers initial sur la carte que nous avons tirée, la probabilité qu'elle soit l'une des deux cartes restantes ne peut plus être ce qu'elle était au début c'est à dire 1/52.
Alors ?
Alors **LES PROBABILITES S'APPLIQUENT AUX EPREUVES ALEATOIRES ET A ELLES SEULES.**
Et peut être faut – il se pencher sur la nature de l'expérience à laquelle nous nous livrons.

Définition: **Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue (le résultat) dépend du hasard.**

①Si nous considérons que notre expérience est décomposée en 2 actions 1) le choix de la première carte, 2) le choix de la seule carte qu'on ne retournera pas. Il est incontestable que la première action est aléatoire mais en ce qui concerne la seconde … Certes quand nous avons tiré l'as de pique, choisir au hasard laquelle des 51 cartes restantes nous allons cacher, est une expérience aléatoire. Mais par contre quand nous n'avons pas tiré l'as de pique, et que le gugusse qui organise l'expérience le cherche avec insistance parmi les 51 cartes restantes pour en faire la seconde carte cachée, diriez - vous que c'est le hasard qui vous a mis en présence de cette seconde carte cachée ? Diriez-vous que cette carte est le produit d'un choix aléatoire ? Diriez-vous que vous participez à une expérience aléatoire ? Ne serait-ce pas comme si notre croupier était capable de faire atterrir sa boule à tous les coups dans un cinquante et unième donné du cylindre?

② Supposons qu'on confie l'organisation de l'épreuve à une machine qui procède **aléatoirement.**
■ Elle tire une carte au hasard et la met de côté, c'est "la carte choisie".
■ Puis elle tire aléatoirement 50 cartes dans le paquet restant et examine leur nature. Si l'as de pique est parmi elles, elle annule l'expérience et recommence. Lorsqu'une expérience est validée, la carte restante est "la carte cachée".
Cette fois, lorsque la machine vous demande si, pour trouver l'as de pique vous préférez la carte choisie ou la carte cachée, vous pouvez lui répondre que les deux issues ont la même probabilité.
Remarquez qu'ici notre épreuve entre dans le cadre familier des tirages multiples sans remise.
Dans une épreuve aléatoire, l'as de pique est donc la carte cachée aussi fréquemment que la carte restante.
Mais dans une épreuve qui implique un processus reposant sur une manipulation de l'univers ne devant rien au hasard, (ce qui est aussi le cas du choix de la porte à ouvrir), après qu'on ait exercé un premier choix, le caractère aléatoire de l'épreuve, est, de mon point de vue, pour le moins discutable.
Mais qu'il soit ou non discutable est finalement de peu d'importance. La présence dans l'univers d'issues qui n'ont pas à y être, le fait que dans le calcul préconisé la somme des probabilités des issues possibles ne soit pas 1 sont autrement significatifs.

Pour essayer d'y voir un peu plus clair et mettre en lumière l'inadéquation des univers d'épreuves dans nos calculs, intéressons-nous au paradoxe des probabilités psychologique d'Emile Borel.

Les probabilités psychologiques

Un grand mathématicien Français, Emile Borel, a publié en 1949 un livre intitulé "Théorie mathématique du bridge à la portée de tous" (éditions Jacques Gabay) dans lequel il s'intéressait à ce noble jeu qui repose, pour l'essentiel, sur la maîtrise des probabilités.

Au bridge les joueurs s'appellent Sud, Ouest, Nord, Est dans l'ordre où ils sont disposés autour de la table.
Les joueurs sont associés en paires. La paire Nord-Sud est opposée à la paire Est-Ouest.
Au début d'une **donn**e, chaque joueur reçoit aléatoirement **13 cartes** provenant d'un jeu qui en comporte **52** et qui est formé de 4 couleurs de 13 cartes (♠,♥,♦,♣).
Dans l'ordre de force décroissante les 13 cartes d'une couleur sont A,R,D,V,10,9,8,7,6,5,4,3,2. (As, roi, dame, valet, …)
On appelle **main** les cartes que chaque joueur a en main à un moment quelconque du jeu.
Au cours d'une **donne** chaque joueur joue à son tour une carte de sa main, avec l'obligation de jouer la couleur de la première carte jouée. Quand les 4 cartes sont jouées elles constituent **un pli** (ou levée) qui est attribué au camp du joueur qui a fourni la plus forte carte. Ensuite ce joueur joue la première carte du pli suivant et les autres joueurs ont autant que possible l'obligation de fournir une carte de la même couleur. Au cours d'une donne, 13 plis sont donc en jeu et le nombre de ces plis est l'unique enjeu d'une donne de bridge.

Au début du livre, Borel évalue un tas de probabilités utiles aux joueurs et à ce stade, il se situe dans l'univers des mains possibles ce qui signifie que pour calculer la probabilité d'un évènement, il compte les mains de l'évènement, (par exemple les mains comportant 6 trèfles et 7 non-trèfles, ou les mains contenant roi et dame de cœur), ensuite il compte toutes les mains possibles, et définit la probabilité de l'évènement comme le rapport de ces deux nombres.
L'univers des mains possibles est évidemment projectif: on imagine toutes les façons dont la distribution aléatoire qui précède la donne a pu faire son œuvre et on compte les mains possibles chez un joueur en supposant leur équiprobabilité. Mais c'est un univers passif en ce sens qu'il n'est influencé par aucun évènement postérieur à la distribution.
Simplement quand un joueur a localisé par exemple 30 cartes sur 52 et qu'il reste 10 cartes inconnues dans la main d'un joueur en l'absence de toute autre information, les mains possibles pour ce joueur sont toutes les combinaisons des 22 cartes non localisées 10 à 10.

Pour donner un exemple, quand le jeu de la carte débute, Nord étale ses 13 cartes au su et au vu de tout le monde, et c'est Sud son partenaire qui va les jouer. Sud a donc localisé 26 cartes (les 13 de Nord et les 13 de sa main) et les adversaires se partagent 26 cartes non localisées.
Supposons que Nord et Sud aient 9 piques sur 13 à eux deux.
Est et Ouest qui ont chacun 13 cartes en main à ce stade se partagent 4 piques ainsi que 22 non-piques.
Borel compte les mains possibles de 13 cartes en Est 10.400.600. Puis parmi ces mains il compte celles qui contiennent exactement 2 piques parmi 4 et 11 non – piques parmi 22: 4.232.492 et il en déduit que la probabilité du partage 2-2 des piques entre Est et Ouest est environ 40,7%.

C'est un peu plus loin, dans son ouvrage que Borel va s'enfoncer dans le marais fangeux de la probabilité psychologique.
Le problème étudié par Borel est le suivant :
On dispose de 6 cartes : RV d'une couleur (♥) et 2, 3, 4, 5 d'une autre couleur (♠).
On les distribue de façon aléatoire : 3 à Est – 3 à Ouest
La probabilité de trouver RV rassemblés dans la main d'Est est **20%**. (4 mains possibles sur 20)
On demande à Est et Ouest de montrer chacun un petit pique de sa main (Ce qui est toujours possible).
Les probabilités sont – elles modifiées ?
Borel examine successivement 3 hypothèses :
1 Est et Ouest choisissent aléatoirement le pique qu'ils vont montrer parmi ceux qu'ils ont en main
2 Est et Ouest montrent toujours le plus petit pique qu'ils possèdent
3 Est et Ouest montrent toujours leur plus petit pique, sauf si leurs deux plus petits piques se suivent : dans ce cas ils choisissent indifféremment l'une ou l'autre.
En ce qui nous concerne, nous allons nous borner à étudier le cas 1.

Cas 1

Est a montré le ♠2 et Ouest le ♠3. Ces cartes ont été montrées (jouées) aléatoirement parmi les piques de chaque main.

Du point de vue des mains possibles Est ne pouvait avoir en début de coup que
245 24V 24R 25V 25R 2**RV**
Donc la probabilité pour qu'il ait RV est passée de **20%** à 1/6 soit **16,7%.**

Maintenant, laissons Borel nous expliquer pourquoi cette probabilité n'est pas la bonne:
« La faute de raisonnement (de l'évaluation précédente) provient de ce qu'on tient seulement compte de la probabilité d'entrée en jeu de la cause : Est recevra RV2, 5 fois sur 100. On oublie de tenir compte de la probabilité que, la cause étant entrée en jeu, c'est-à-dire Est ayant reçu RV2, Est et Ouest jouent tous deux comme ils l'ont fait. Voici maintenant le raisonnement correct qui consiste à appliquer la formule de Bayes…»
Et Borel nous explique que si Est a RV2 la probabilité pour qu'il joue le 2 est 1, tandis que la probabilité pour qu'Ouest joue le 3 est 1/3 puisqu'il a 3 petites cartes.
Si on passe en revue de la même façon les 6 mains possibles pour Est et qu'on s'intéresse à toutes les possibilités de fournitures, on verra que sur les cas où le 2 et le 3 sont fournis, la fréquence de RV en Est sera 1/5 soit **20%** c'est-à-dire exactement ce qu'elle était au début du coup.
Détail du calcul combinant probabilité de présence et probabilité de fourniture du 2 et du 3:

EST	OUEST	P(présence)	P(fourniture 2 et 3)	P(présence et fourniture)	TOTAL
245	**3**RV	1/6	1/3	1/18	4/18
24V	**3**5R	1/6	1/4	1/24	
24R	**3**5V	1/6	1/4	1/24	
25V	**3**4R	1/6	1/4	1/24	
25R	**3**4V	1/6	1/4	1/24	
2RV	**3**45	1/6	1/3	1/18	1/18

Au total: probabilité d'avoir l'une des mains possibles et de fournir le 2 en Est et le 3 en Ouest = 5/18
Probabilité d'avoir RV en Est quand le 2 et le 3 sont fournis par les mains de l'exemple = 1/18 divisé par 5/18 = 1 / 5 = **20%**
Bien sûr pour que ces chiffres soient valables, il faut que d'autres cartes soient fournies avec les mains possibles, par exemple avec 245 pour 3RV, le 5 et le 3 peuvent être fournis. Mais ces cas sont négligés. Nous ne nous intéressons qu'aux cas où comme dans notre problème, le 2 et le 3 ont été fournis.

L'étude détaillée du cas 1 montre bien que Borel fait fournir les cartes de toutes les façons possibles à partir des seules combinaisons qui sont compatibles avec notre donne. Dans l'exemple de Borel on s'interroge sur la probabilité après qu'Est ait fourni le 2 et Ouest le 3. Toutes les combinaisons à partir desquelles on invite les 2 joueurs à fournir des petits piques au hasard situent bien ces 2 cartes là où on les a vues.
Cela est conforme à une autre déclaration de Borel:
« Les déclarations, d'abord, l'entame et le jeu de la carte ensuite, nous fourniront des renseignements de plus en plus précis **desquels nous tiendront compte en éliminant les hypothèses incompatibles avec ce que nous avons appris** ; mais qui avaient dû être envisagées comme possibles au début, dans les calculs faits avant la donne. Nous aurons aussi à tenir compte de **la psychologie** des joueurs, c'est à dire de la probabilité des causes. Nous nous demanderons, **en supposant que tel joueur a bien reçu telle combinaison donnée de cartes**, quelle est la probabilité pour qu'il joue comme il a joué. Et l'application de la formule de Bayes nous permettra enfin de remonter à la véritable probabilité à posteriori : celle que l'effet observé soit bien du à la cause. »
Borel appelle ces probabilités des "probabilités psychologiques". Comme on le voit, dans cet exemple, il a quitté l'univers passif des mains possibles pour un univers actif formé d'épreuves dans lesquelles la machine touche chaque combinaison de cartes possible avec la même fréquence ($\frac{1}{6}$) et fournit les petites cartes à pique de façon aléatoire.
Il n'est pas sûr que Borel soit conscient de ce changement. N'étant pas un grand fan de l'axiomatique (qu'il tient pour inutile comme il le dit dans certains de ses écrits) Borel n'est pas trop préoccupé par la coexistence d'univers parallèles dans ses démonstrations. Il dit les choses comme il les ressent avec l'autorité de l'ancien ministre de la marine devenu maître es probabilités en l'université de Paris.

En tous cas, il est paradoxal que l'on puisse calculer 2 probabilités différentes selon qu'on se situe dans un univers de mains possibles ou dans un univers de donnes où l'on joue les cartes à partir de ces mêmes mains.
En fait ce problème est de même nature que celui des 3 portes. Dans un problème le meneur de jeu ouvre une porte aléatoirement quand il en a la possibilité, dans l'autre on demande aux joueurs de fournir aléatoirement un petit pique quand ils en ont la possibilité. Dans les 2 cas la fréquence de ces actes conditionne le calcul de la probabilité et il faut se référer à un univers d'épreuves étudié selon l'optique de Bayes pour justifier les nombres trouvés.
Ceci dit, si les deux problèmes sont de même nature, celui de Borel, on va le voir, nous donne plus d'occasions de démontrer les incohérences de l'analyse sur laquelle il est basé.

Bizarre? Vous avez dit bizarre?

Pour commencer observons un fait bizarre: Avec les mains à partir desquelles il fait fournir Est et Ouest, Borel évalue à $\frac{1}{6}$ la probabilité de présence de RV dans la main d'Est.
Cela signifie que dans $\frac{1}{6}$ des donnes avec lesquelles il fait fournir des petites cartes, RV se trouvent en Est.

Pourquoi ne considère – t – il pas, alors, que $\frac{1}{6}$ est la probabilité que nous cherchons?

Pourquoi lui superpose – t – il une fréquence de fourniture qui nous projette dans un univers de donnes ?
Avons-nous besoin de savoir avec quelle fréquence Est aura RV quand il fournira aléatoirement le 2 et le 3 avec les mains possibles (c'est-à-dire avec les mains qui mettent le 2 et le 3 là où on les a vus)?
Ou bien nous demande – t -on d'évaluer la probabilité qu'Est ait RV dans l'ensemble des donnes où nous savons que le 2 est en Est et le 3 en Ouest, quel que soit le processus qui nous les ait fait localiser?

Quand Borel enseignait la probabilité conditionnelle à ses élèves et qu'il leur parlait de "la probabilité de A sachant que B est réalisé" est – ce qu'il leur disait que cette probabilité dépendait du mécanisme par lequel nous sommes parvenu à la connaissance de B réalisé?
Pour ma part je ne connais aucun ouvrage de probabilité où l'on procède ainsi. Et du reste je trouve que la formulation de cette probabilité prête à confusion dans la mesure où quand B est réalisé, il quitte le champ des possibles et devient l'univers tout entier. Ce qui est le cas, dans notre exemple de l'ensemble des mains possibles qui situent le 2 en Est et le 3 en Ouest.

Le tour de passe – passe.

En fait, l'univers tel que nous le présente Borel est boiteux. Il ne réunit que 5/18 de la probabilité. Où sont passés les 13/18 manquants?
Puisque Borel fait fournir de petits cartes à Est et Ouest à partir des seules mains possibles, il y a des cas où par exemple, Est ayant 24V et Ouest 35R l'un doit fournir le 4 et l'autre le 5 avec une fréquence de présence et fourniture égale à $\frac{1}{24}$.
En comptabilisant tous les cas de ce type, on retrouve bien toute la probabilité de l'univers de donnes mais un fait doit nous interpeler:
Quand Est et Ouest fournissent le 4 et le 5 quelle est la probabilité que l'un d'eux ait RV?
Elle est nulle évidemment !!!
Car si l'un des joueurs a le 4 et le 2 et l'autre le 5 et le 3, aucun d'eux, dés lors qu'on leur a donné 3 cartes, ne peut avoir RV.
La voilà la raison pour laquelle la probabilité calculée par Borel n'est pas la même que la probabilité de présence dans les jeux qui défilent dans les mains des joueurs.
Or il est bien évident que dans le jeu auquel nous jouons, si nous distribuons de façon aléatoire ♠5, ♠4 , ♠3 , ♠2 et ♥R , ♥V aux deux joueurs et que nous leur demandons de fournir chacun aléatoirement un pique, s'ils fournissent ♠5 et ♠4, la probabilité que l'un d'eux ait ♥RV ne peut être nulle. Cette probabilité doit être la même quelles que soient les 2 petites cartes fournies par Est et Ouest.
C'est donc que l'univers proposé par Borel est impropre à calculer la probabilité dans notre jeu.
Nous nous participons à une expérience aléatoire où quand le 4 et le 5 sont fournis, la probabilité de RV en Est est la même que quand ils fournissent le 2 et le 3. Et Borel lui illustre sa probabilité en se basant sur une expérience aléatoire dans laquelle la probabilité est celle qu'il prétend être dans le seul cas où le 2 et le 3 sont fournis!

La preuve par quatre.

Si la loi de Bayes selon Borel permet de calculer la probabilité de RV en Est (20%), elle permet aussi de calculer la probabilité de 4 en Est, de 5 en Est, de Roi en Est et de Valet en Est , toutes étant égales à $\frac{\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{18}}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{2}$.
Quand le 2 et le 3 sont fournis, ces probabilités sont toutes évaluées à $\frac{1}{2}$ ce qui est cohérent avec ce que nous souffle notre intuition.

Montrons maintenant les 2 mains, comportant chacune 2 cartes inconnues au moment où se pose le problème et inscrivons un numéro au dos de chaque carte inconnue.

Le calcul précédent nous ayant appris que chaque carte avait la même probabilité de se trouver en Est ou en Ouest, on peut estimer que la probabilité pour que la carte 1 soit le R est $\frac{1}{4}$.
Et une fois que ce R est en place, la probabilité pour que la carte 2 soit le V est $\frac{1}{3}$ (il ne reste que 3 places vacantes)
Et donc la probabilité pour que la carte 1 soit le R et la carte 2 soit le V est $\frac{1}{4} \mathrm{x} \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.
Et on peut établir de même que la probabilité pour que la carte 1 soit le V et la carte 2 soit le R est aussi $\frac{1}{12}$.
D'où nous pouvons déduire que la probabilité de RV en Est est $\frac{1}{12} \mathrm{x} 2 = \frac{1}{6}$.
Or cette probabilité de $\frac{1}{6}$ trouvée en exploitant un résultat découlant de la formule de Bayes selon Borel, c'est justement la probabilité qu'on trouve dans l'univers des mains possibles et que Borel conteste en disant qu'elle est égale à 20%.
N'est ce pas la preuve que la probabilité calculée par Borel n'est pas vraiment pertinente dans notre situation?

Sur quelle illusion reposent le paradoxe de Borel et le paradoxe de la porte?

Borel a bien dit : Nous nous demanderons, **en supposant que tel joueur a bien reçu telle combinaison donnée de cartes**, quelle est la probabilité pour qu'il joue comme il a joué.
Mais peut être aurait – il du faire fournir Est et Ouest à partir de toutes les distributions possibles des 6 cartes 3 par 3 et pas seulement à partir de celles qui situent 2 en Est et 3 en Ouest?
Dans ce cas la probabilité de RV chez un joueur aurait été la même quel que soit le couple de petits piques fournis à la première levée.
Mais alors, le problème aurait été qu'à un moment où à un autre Ouest aurait fourni le 2 alors qu'au moment où se pose le problème nous savons que cette carte se trouve en Est. Et un univers où le 2 n'est pas en Est n'est pas non plus le nôtre. Borel sait bien que son univers ne doit contenir que les évènements possibles au regard de ce qu'il sait. Mais pourquoi ignore – t –il délibérément que la probabilité totale de son univers doive être 1 et non pas 5/18? Ce qui aurait dénoncé l'incohérence de cet univers au regard de ce qu'il veut démontrer, (à savoir: quand 2 petits piques sont fournis aléatoirement, la fréquence de RV en Est est 20%), puisque dans cet un univers quand le 5 et le 4 sont fournis cette probabilité est 0.

En somme, le seul univers compatible avec le fait que Borel veut démontrer est un univers où le 2 et le 3 ne sont pas encore fournis et où l'on imagine ce que serait la fréquence de RV en Est quand le 2 et le 3 (ou n'importe quel couple de petites cartes) seraient fournies de façon aléatoire. Mais l'univers avant que nous sachions où se trouvent le 2 et le 3 est justement celui où la probabilité de présence de RV en Est, dans le référentiel des mains possibles, est 20%. Il n'est donc pas étonnant que dans un univers de donnes où l'on fournit 2 petites cartes avec ces distributions, RV se trouvent en Est avec la même fréquence.
En ce qui concerne le problème des 3 portes, nous observons les mêmes dérives. Un univers où la porte 2 peut être bonne ou la porte 3 ouverte n'est pas l'univers où nous nous trouvons quand se pose le problème. C'est un univers imaginé avant que le meneur de jeu n'ouvre une porte et à ce titre il traduit la probabilité telle qu'on peut la calculer à ce moment là sans invoquer une quelconque loi de Bayes, à savoir: la probabilité pour que la porte choisie soit mauvaise est 2/3.

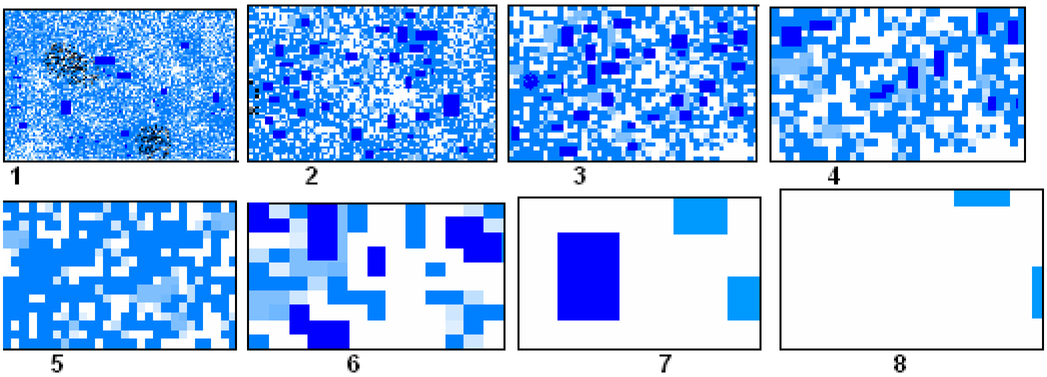
Peut – être comprendrez-vous mieux où je veux en venir à travers un 3^{e} exemple:
La première chose que vous voyez en débarquant sur une île est une pancarte sur laquelle on peut lire:
"Etat civil des adultes de l'île aujourd'hui:
140 familles formées de 40 hommes célibataires, 40 femmes célibataires, 60 couples femme + homme".
À peine avez-vous fini de lire la pancarte que vous rencontrez une adulte femme.
Quelle est la probabilité pour qu'elle soit mariée?
Allez-vous vous fier à l'état – civil de l'île et estimer que cette probabilité est 60%?
Ou allez vous imaginer que le chef de l'île tire au hasard une famille et si cela tombe sur un couple marié tire au hasard parmi le couple pour savoir s'il vous envoie l'homme ou la femme? Ce qui donnerait une probabilité de 3/7 pour mariée (autrement dit la proportion parmi les familles de celles qui sont mariées).
Il vous suffit d'examiner la nature de l'univers dans lequel vous vous trouvez pour en conclure que vous n'êtes pas dans un univers d'épreuves où il vous faudra revenir de nombreuses fois dans l'île pour éprouver la nature du mécanisme qui a mis cette femme en votre présence et donner de la crédibilité au second calcul (qui d'ailleurs revient à considérer que vous avez rencontré une famille et non pas une femme). Vous êtes dans un univers où vous avez rencontré une femme, pas dans un univers où vous auriez pu rencontrer un homme. Vous mettez une fois les pieds dans cette île et vous n'y retournerez pas.
Quelles que soient les raisons pour lesquelles cette femme est là, c'est le hasard et lui seul qui l'a mise en votre présence. Et ce hasard vous enjoint de faire un zoom dans l'état civil sur l'ensemble des femmes et d'en déduire qu'il y a 60% de chances pour que celle – là soit mariée.

En conclusion, ce que démontrent ces exemples, c'est qu'une vision en fréquence de la probabilité n'est pas forcément opportune quand on nous demande de calculer la probabilité dans une épreuve unique.
Si l'univers est passif, pas de problème, un univers d'épreuves confirmera la probabilité calculée dans une épreuve.
Si l'univers est actif, par contre, la probabilité calculée sera celle qu'on aurait calculée dans un univers passif avant que n'aient lieu les évènements qui donnent à l'univers son caractère actif. Cette probabilité ne peut donc en aucun cas, être assimilée à la probabilité dans une épreuve unique où les évènements avérés réduisent le champ des possibles sans qu'il soit possible d'imaginer qu'ils auraient pu se produire autrement, sinon dans une autre épreuve ou à un autre moment.
La loi de Bayes est propice à ce genre d'erreurs en ce sens qu'on l'emploie indifféremment dans des situations où les fréquences sont déterminées par rapport à la population d'un univers concret ou projectif mais passif (exemple d'une population où les sujets sont sains ou malades, vaccinés ou non vaccinés) et dans des situations où les fréquences sont déterminées par la succession de 2 actes (pas forcément aléatoires) ce qui est le signe qu'on se trouve dans un univers d'épreuves et donc un univers actif (univers de Borel ou univers des 3 portes).

Si ce genre de confusion est fréquent c'est que dans nos calculs de probabilité nous réagissons souvent comme des "casinomaniaques". Autrement dit nous estimons (sans vraiment en être conscients) que les probabilités étant nées de l'étude des jeux de hasard, il est justice que dans leurs conclusions elles s'inspirent le plus souvent de cette approche.
Aussi, au lieu de nous en remettre aux règles de l'axiomatique et d'étudier la configuration de l'univers et sa compatibilité avec notre situation, puis d'en quantifier les évènements par une mesure, nous faisons comme si nous trouvions à une table de casino où l'expérience aléatoire se répétant, nous devions faire appel à une martingale pour réagir judicieusement.
Martingale (du provençal martegalo, de Martigues) Système de jeu qui prétend, selon des principes fondés sur le calcul des probabilités, assurer un bénéfice certain dans les jeux de hasard.
Or la martingale n'a de sens que dans un univers d'épreuves et elle est sans fondement ni justification dans une épreuve unique.

La pertinence du zoom.

Dans une expérience aléatoire, considérer que l'univers est réduit à 2 portes au lieu de 3, considérer que la fourniture du 2 et du 3 de pique réduit l'univers aux seules mains possibles qui situent ces deux cartes là où on les a vues, reviennent à faire un zoom sur l'univers initial pour calculer une probabilité plus pertinente.
Mais il semble que ceux qui sont confrontés à des problèmes de ce type préfèrent au contraire prendre du recul et se situer dans un univers où ces évènements peuvent avoir lieu ou ne pas avoir lieu pour évaluer leur probabilité à l'aune d'une martingale.
Pourtant la parabole de la chute devrait les faire réfléchir.
La situation est la suivante:
Mille fusées situées en orbite haute vont retomber sur la planète Uncououiuncounon qui est composée à 59% de bleu de Bresse et à 41% de blanc cabécou.
Les techniciens de cap carnaval suivent la chute erratique des engins à travers 8 photos, de plus en plus rapprochées, de la zone où l'impact final est possible.
Comme les techniciens sont joueurs, ils parient sur la couleur du point d'impact.



Les casinomaniaques parient sur la zone bleue qui leur garantit un rapport substantiel (59%).
Les autres attendent la 8^{e} photo pour parier.
D'après vous quelle est la stratégie la plus rentable?
La 2eme évidemment. Bien sûr les casinomaniaques vont gagner leur pari dans 59% des cas.
Mais il suffit de regarder la 8^{e} photo pour comprendre que celui qui attend d'avoir le plus de détails possibles sur le point d'impact <u>va gagner son pari dans plus de 59 pour cent des cas</u>.
Et peu importe que la succession des photos soit aléatoire ou organisée selon un mécanisme précis. La chute étant aléatoire, la probabilité de chaque évènement (bleu ou blanc) à un instant donné est proportionnelle à la mesure de son aire sur la photo prise à cet instant. Au départ, on sait qu'environ 590 fusées sur mille tomberont sur la zone bleue. Mais si un zoom sur l'ensemble des possibles nous permet de parier sur la zone bleue quand elle est plus probable et sur la zone blanche quand elle est plus probable, la probabilité basée sur ce zoom sera non seulement plus pertinente au moment du zoom mais aussi plus rentable.

Ceci – dit, si ces images proviennent d'un enregistrement préalable et qu'un technicien connaissant le résultat de chaque chute s'amuse à occulter par exemple 25% des chutes où la fusée va tomber sur le blanc (ou sur le bleu), l'expérience n'a plus rien d'aléatoire et nous passons d'un univers passif à un univers actif.
Tant que la probabilité était liée à la complexion de l'univers, c'est-à-dire à la mesure des proportions relatives de bleu et de blanc dans le cadre de l'objectif, les projections des casinomaniaques leur permettaient d'évaluer la fréquence de leurs gains.
Si le casinomaniaque connait le travers du technicien occulteur, autrement dit le fonctionnement de la machine, il peut quantifier la fréquence finale en fonction de la fréquence initiale et savoir sur quelle couleur il est pertinent de jouer dans le nouveau contexte.
Mais vous qui attendez la 8^{e} image pour juger de vos chances qu'allez-vous faire ? Réduire de 25% la proportion de bleu ou de blanc pour évaluer la probabilité à ce moment-là ? Pourquoi ? La chute des fusées n'est-elle plus aléatoire ? La probabilité de bleu n'est plus égale au rapport de l'aire bleue sur l'aire totale dans les images que vous voyez ?
Ce n'est pas parce que le technicien a supprimé 25% des chutes d'une couleur sur l'enregistrement qu'une chute donnée ne reste pas une expérience aléatoire à laquelle on peut appliquer les règles usuelles, vous ne trouvez pas ?
Cet exemple vous fait toucher du doigt la différence entre fréquence dans un groupe d'épreuves et probabilité dans une épreuve.
S'il est sûr que la répétition d'une épreuve basée sur un univers passif dont les issues sont équiprobables doit reproduire les évènements avec une fréquence égale à leur probabilité, il n'est pas évident qu'une fréquence dans un univers d'épreuves où les issues élémentaires ne sont pas produites avec la même fréquence puisse être amalgamée à une probabilité.

Panique au CNRS

Voici un extrait du "journal du CNRS".

Au tribunal comme ailleurs, il existe aussi de « mauvaises intuitions mathématiques » dues à des biais cognitifs…
L. S. : Oh que oui ! Je vais vous donner mon exemple préféré, car il rend tout le monde fou, y compris les mathématiciens et même les probabilistes. Imaginez que lors d'un voyage, votre voisin, en bavardant, vous fait savoir qu'il a deux enfants dont un fils qui, vous l'apprenez au passage, est né un mardi. La question est la suivante : quelle est la probabilité que l'autre enfant de cet homme soit une fille ?
Spontanément, on aurait envie de répondre 50 %, car savoir que l'un des enfants est un garçon ne préjuge en rien du sexe de l'autre. Eh bien c'est faux ! Car si on ne connaissait que le fait que l'un des enfants est un garçon, la probabilité que l'autre soit une fille serait de 2/3. En effet – sans compter les jumeaux –, les familles de deux enfants sont réparties en quatre types : gg, gf, fg et ff. Mais comme cette famille n'est pas du type ff (puisqu'il y a un fils), elle est forcément de type gg, gf ou fg ; ces trois types étant également répartis, il y a bien deux chances sur trois que l'autre enfant soit une fille.
Mais nous savons aussi que le garçon est né un mardi. Cela paraît incroyable, absurde, de penser que ce fait puisse changer la probabilité d'avoir une fille. Pourtant c'est bien le cas ! En effet, si l'on dresse la liste de toutes les possibilités d'avoir une famille de type gg, par exemple, avec tous les jours de la semaine, on arrive à 49 possibilités. Il en sera de même pour les familles de type gf et fg, soit un total de 147 possibilités. Si l'on écarte maintenant toutes celles qui ne contiennent pas un garçon né un mardi, il en reste exactement 27, dont 13 où l'autre enfant est un garçon, et 14 où il s'agit d'une fille. D'où une probabilité de 14/27 que l'autre enfant soit une fille… Il y a de quoi s'arracher les cheveux !

Vous remarquerez qu'on interroge L.S. sur "les mauvaises intuitions mathématiques dues à des biais cognitifs".
Pas sur "les mauvaises intuitions mathématiques dues à de mauvaises pratiques scientifiques".
Qu'est-ce "qui rend fou tout le monde y compris les mathématiciens et même les probabilistes"?
Qu'on leur demande quelle est la probabilité qu'une personne de sexe inconnu soit une fille ou un garçon?
Se pourrait –il qu'il y ait plus de deux issues à cette expérience aléatoire: "fille" ou "garçon" ?
Se pourrait –il que ces deux issues ne soient pas équiprobables?
Se pourrait-il que l'univers découlant de la question qu'on nous pose, ne soit pas formé de deux issues, "fille" ou "garçon", équiprobables?
Se pourrait –il alors que la réponse à la question posée ne soit pas 0,5 ou 50%?

Qu'est – ce qui autorise un mathématicien à différencier un objet fille + garçon (fg) d'un objet garçon + fille (gf) ?
En quoi l'ordre dans lequel on cite ses composantes jouerait –il un rôle dans ce binôme?
L'antériorité de la naissance a-t-elle une utilité quelconque dans la résolution de notre problème? Où peut être que le fait que l'un d'eux soit dans une chambre bleue et l'autre dans une chambre rose a de l'importance?
Est-ce qu'on nous demande la probabilité pour que l'autre enfant soit "une fille née avant le garçon" ou "une fille dormant dans la chambre rose"? Non.
La seule possibilité que permet l'énoncé est de distinguer "connu, inconnu" mais de ce point de vue seul gf existe.
Alors pourquoi différencier fg de gf?

La pratique qui consiste à ajouter artificiellement d'autres caractères aux enfants, comme l'antériorité de la naissance, la couleur de la chambre, le jour de naissance alors que le seul caractère auquel on s'intéresse est le sexe ne contribue – t –elle pas à pervertir l'énoncé du problème en suggérant qu'on pourrait utiliser d'autres univers, sans rapport avec celui que les probabilités exigent? Des univers ou la déclinaison de ces caractères en modalités crée d'autres clivages, modifie les proportions entre classes, fausse notre approche d'un problème qui est à la base d'une simplicité exaspérante.

Et surtout, qu'est ce qui autoriserait un mathématicien scrupuleux quand on lui pose une question sur le sexe d'une personne à spéculer sur un univers où il y aurait deux personnes?
La personne dont on connait le sexe peut –elle encore avoir quelque chose à faire dans le sac des personnes dont il faut deviner le sexe?

En matière de probabilités, l'univers est directement hérité de la question qu'on nous pose.
Pour qu'il soit mathématiquement exploitable, l'énoncé d'un problème de probabilités doit permettre de définir à la fois le protocole de l'expérience aléatoire (autrement dit la nature de toutes les issues possibles) et la complexion de l'univers (autrement dit la quantification de l'univers au regard de ces issues).
Quand on nous demande la probabilité pour que le deuxième enfant d'une famille soit une fille, on se soucie comme d'une guigne du sexe, du jour de la naissance, de la couleur de la chambre du premier enfant dans la mesure où ces paramètres n'ont aucune influence sur la complexion de l'univers qui est exclusivement formé d'un deuxième enfant fille et d'un deuxième enfant garçon, ces deux issues étant équiprobables.

Le jour de naissance d'un enfant aurait une influence sur la probabilité du sexe d'un autre ! Pfff c'est n'importe quoi!
Comme quoi, il arrive que les "biais cognitifs" des gens simples s'avèrent quelquefois scientifiquement plus fiables que les suppositions hasardeuses de mathématiciens à la recherche d'un truc sensationnel à mettre dans le journal.

Le paradoxe de la belle au bois dormant.

La belle au bois dormant fait ce pour quoi elle est née : elle dort.
Quand on la réveille, elle ne se souvient de rien, elle reste éveillée une heure puis se rendort aussitôt.
Les 7 nains qui se sont trompés de conte, jettent une pièce en l'air le dimanche.
Si elle tombe sur pile ils réveilleront la belle le lundi puis la laisseront dormir le reste de la semaine.
Si elle tombe sur face ils réveilleront la belle le lundi, puis le mardi et la laisseront dormir le reste de la semaine.
Quand les nains réveillent la belle, ils lui expliquent à quoi ils jouent et ils lui demandent de déterminer la probabilité pour que la pièce qu'ils ont lancée le dimanche soit tombée sur face.
Etant très calée en probabilités, que doit – elle répondre?
Bon il y a de grandes chances que, de prime abord, elle réponde "foutez – moi la paix, laissez moi dormir".
Mais si on lui demande gentiment de faire un effort et qu'on lui fait croire que, si elle trouve la réponse juste, elle peut gagner un prince charmant, là peut être qu'elle va consentir à s'investir dans l'axiomatique.
Elle peut dire en gros "Si je comprends bien vous me demandez quelle est la probabilité pour que la pièce que vous avez jetée le dimanche soit tombée sur face?" Equipée d'un Q.I. (et d'un coefficient aérodynamique) largement au dessus de la moyenne après avoir jeté un coup d'œil à sa calculatrice scientifique elle va vous répondre "1/2" et elle se rendormira sur le champ. Mais elle se ravisera aussitôt et vous dira "Ou alors vous me demandez de me situer dans un univers de réveils et vous voulez savoir avec quelle fréquence le mien suit un face ou un pile et alors là comme un face est suivi de deux réveils alors que le pile est suivi d'un seul, je dirais 2/3 pour le face" Et elle ajoutera d'une voix ensommeillée "Mais il faudra me garder éveillée longtemps si vous voulez me faire croire que c'est dans un univers de réveils que je peux trouver la probabilité d'un pile ou face. Et hop, dodo".
Et la beauté, la vraie, a toujours raison. Si la nôtre avait été moins encline à rejoindre le monde des rêves où on ne la réveille jamais, elle eut pu vous dire:
"Vous jetez une pièce en l'air, vous la cachez sous votre godasse, vous me réveillez et vous me demandez d'évaluer la probabilité de face. Mon univers se réduit aux deux côtés de la pièce qui est sous votre godasse et le caractère aléatoire du jeu fait que j'évalue à ½ la probabilité de face.
Que je sache que vous me réveillez cent fois après un face et une seule fois après un pile ne change rien à l'affaire. La pièce qui est sous votre godasse a toujours un côté pile et un côté face et les deux côtés sont équiprobables.
Ah si votre question était "Si vous jouiez souvent à ce jeu avec quelle fréquence auriez vous raison en disant "face"?" cela m'obligerait à me situer dans un univers d'épreuves et à prendre en compte la fréquence des réveils au regard du résultat de la partie de pile ou face pour y répondre.
Mais mon problème n'est pas de gagner mon pari le plus souvent possible et si le mécanisme imposé à mes réveils est connecté avec celui qui produit des "piles" ou des "faces" il n'a pour autant aucune influence sur lui. Et quand vous me demandez "quelle est la probabilité pour que la pièce qui est sous mon pied soit tombée sur face?" seul le second mécanisme est impliqué.
C'est toujours une histoire d'univers.
Et de vocabulaire aussi.
Parce que si vous voulez que j'effectue mon calcul dans un univers de réveils, vous eussiez été plus avisé de me demander, par exemple "Quelle est la probabilité pour que votre réveil suive un "face"". Et encore j'aurais pu vous faire remarquer que d'un point de vue purement axiomatique, faire l'amalgame entre une fréquence asymptotique dans un univers d'épreuves et une probabilité comporte certains risques. Me demander "avec quelle fréquence votre réveil suit – il un "face"?" eut été plus approprié."

Conclusion

En somme les paradoxes n'ont pas fait beaucoup de progrès depuis celui de Bertrand.
Si on assimile la probabilité de tirer une corde à celle de tirer un point, soit sur un cercle, soit dans un disque, soit sur un rayon, il y a de grandes chances qu'on trouve des valeurs différentes pour cette probabilité mais cela n'est pas trop anormal dans la mesure où à mon humble avis, pour tirer une corde il vaudrait mieux se situer dans un univers de cordes que dans un univers de points (le seul cas permettant vaguement l'amalgame étant celui où l'on tire aléatoirement 2 points sur la circonférence d'un cercle).
Mais où est le paradoxe?
Si on nous dit que la probabilité de trouver un trésor derrière une porte dés l'instant où une autre porte a été ouverte n'a pas a être calculée dans un univers de portes mais dans un univers d'épreuves où la porte ouverte peut être ouverte ou fermée, c'est qu'on a un problème avec la notion d'"instant" et avec le concept de "possible". Car un instant ce n'est pas autre chose qu'un état exhaustif de l'univers, ce qui fait que dés l'instant où une porte a été ouverte, un univers où elle peut être fermée n'est pas le nôtre. Dans notre univers, cette porte fermée est impossible. Et si on a des problèmes avec le concept de possible, autant dire avec le concept d'univers, il n'est pas étonnant qu'on ait des problèmes avec l'axiomatique et donc avec les probabilités.
Mais où est le paradoxe?
Si on nous dit que la probabilité de trouver roi – valet dans une main adverse quand chaque adversaire a montré une petite carte de son jeu n'a pas à être calculée dans un univers de mains mais dans un univers de donnes où ce que l'on veut démontrer n'est vrai que pour le couple de petites cartes utile à notre démonstration, ou bien dans un univers de donnes où les petites cartes qui ont été fournies dans la nôtre n'ont pas encore été fournies, c'est que probablement, la encore, on n'a pas étudié assez soigneusement la cohérence de notre univers avec ce qu'on veut démontrer.
Mais où est le paradoxe?
Et si l'on veut nous faire croire que la probabilité d'un face n'a pas à être calculée dans un univers de piles ou faces mais dans un univers de réveils structuré en fonction du lancer d'une pièce, c'est que notre goût du paradoxe nous a dramatiquement éloigné du respect de l'axiomatique et de l'exigence de rigueur que demandent les mathématiques à l'égard du vocabulaire.
Mais où est le paradoxe?
En somme pour calculer une probabilité au sens mathématique, il est indispensable de veiller au respect de l'axiomatique.
Nous n'avons généralement pas à nous situer dans un univers d'épreuves (ou de réveils) sauf si l'énoncé en fait explicitement la demande mais dans ce cas, peut être vaut – il mieux parler de "fréquence" plutôt que de "probabilité". L'univers tel qu'il est décrit dans l'axiomatique de Kolmogorov n'est pas un univers d'épreuves.
L'étude des univers d'épreuves est du domaine statistique. De tels univers sont rendus mesurables grâce aux lois à densité qui dérivent plus ou moins de la loi binomiale qui voit une épreuve identique se répéter plusieurs fois. Mais dans cette épreuve la probabilité est déterminée dans un univers classique et donc passif. Ce n'est pas l'univers d'épreuves qui permet de calculer la probabilité dans une épreuve mais au contraire la probabilité dans une épreuve qui contamine l'ensemble des épreuves et détermine les fréquences observables quand on procède à un grand nombre d’entre elles.
Pour calculer la probabilité dans une épreuve la notion d'instant est fondamentale car c'est elle qui fixe les limites de l'univers des possibles et donc la nature et le nombre (ou la mesure) des issues qui le composent.

Et on pourrait conclure ainsi par exemple:

"Mais non monsieur, ce ne sont pas les paradoxes probabilistes qui sont anti-probabilités.
Ce sont les probabilités qui sont anti – paradoxes probabilistes".