Les suites

Table des matières

Caractérisation des suites

Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ qui à un entier n fait correspondre un nombre réel appelé U_n.
U_n est le terme général de rang n de la suite. n prend toutes les valeurs possibles depuis un rang minimum n_0.

2 mécanismes de construction possibles pour les suites. Dans ce qui suit $n \in \mathbb{N}$

- Terme général défini de façon explicite Un = f(n), par exemple Un=3n+7 (calcul direct de tous les termes)
- Mécanisme de construction défini par récurrence $U_{n+1}=f(U_n)$ par exemple $U_{n+1}=3U_n + 4$ avec $U_0=7$.
  On peut aussi imaginer une double récurrence $U_{n+2} = 3U_{n+1} + U_n$ avec $U_0 = 1$ et $U_1 = 2$

Propriétés caractérisant les suites

(Un) croissante	Si pour tout n, $U_{n+1} > U_n$ ou $U_{n+1} - U_n > 0$
(Un) décroissante	Si pour tout n $U_{n+1} < U_n$ ou $U_{n+1} - U_n < 0$
(Un) monotone	(Un) est strictement croissante ou décroissante pour tout n
(Un) stationnaire	Si pour tout n à partir d'un certain rang $U_{n+1} = U_n$
(Un) alternée	Si pour tout n U_{n+1} et U_n sont de signes contraires
(Un) périodique	$\exists p$ tel que pour tout n $U_{n+p} = U_n$
(Un) et (Vn) adjacentes	si leurs sens de variation sont différents et Un –Vn →0 quand n →∞
(Un) minorée	$\exists m$ tel que tout n $U_n \geq m$
(Un) majorée	$\exists M$ tel que tout n $U_n \leq M$
(Un) bornée	Si (Un) est à la fois majorée et minorée

Convergence ou divergence d'une suite

(Un) est convergente si Un tend vers une limite finie L quand n ➜ ∞

- Lim Un = L si quel que soit ε > 0 et aussi petit que l'on veut l'inéquation $|U_n - L| < \varepsilon$ admet une solution de type n>N (N étant un rang fonction de ε).

(Un) est divergente si elle ne converge pas. En particulier une suite telle que lim (Un) = ±∞ diverge

- Un →+∞ si tout μ>0 (aussi grand que l'on veut), l'inéquation Un > μ a une solution de type n>N avec N fonction de μ.
- Un→ –∞ si tout μ <0 (aussi petit que l'on veut), l'inéquation Un < μ a une solution de type n>N avec N fonction de μ.

Il existe d'autres définitions équivalentes de la convergence.

- Si Un est croissante et majorée ou décroissante et minorée, alors Un converge.
  Mais une suite peut être bornée sans être convergente (par exemple Cos(n))
- Si Un = f(n) et que f(x) admet une limite L quand x → +∞ , alors Un a pour limite L
- Si Vn converge vers 0 et à partir d'une certain rang |Un| < K|Vn| (avec K > 0) alors Un converge vers 0.
- Un converge si elle est la somme, ou le produit de 2 suites convergentes.
- Si V_n et W_n sont 2 suites convergentes vers L et que pour n>N on a $V_n \leq U_n \leq W_n$ alors lim U_n= L
  Exemple $U_n = \frac{2n^2}{n^3+1} < \frac{2n^2}{n^3}$ donc $0 < U_n < \frac{2}{n}$ et Un converge vers 0.

Ci-dessous des familles de suites de références que l'on sait convergentes de limite 0 :

$U_n = n^{-k}$ (avec k > 0). (Par exemple $\frac{1}{n^2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{n}}$)
$U_n = k^{-n}$ avec k >1 (Par exemple $\frac{1}{2^n}$)
$U_n = k^n$ (avec –1< k < 1) (Par exemple $(0,9)^n$ ou $(-\frac{7}{8})^n$)

D'autres définitions de la divergence.

- si $U_n = f(n)$ et si quand x ➜ ∞ lim f(x)= ∞ alors lim U_n = ∞
- On peut aussi démontrer que lim U_n = ∞ en la comparant à une suite de référence.
  Par exemple $2^n = (1+1)^n = 1+n +....$ (début du développement binôme de newton) et n a pour limite ∞).

Ci-dessous des familles de suites de références que l'on sait divergentes

$U_n = n^k$ avec k > 0 (Par exemple **n**, **n^2** ou $\sqrt{n}$)
$U_n = k^n$ avec k > 1 (Par exemple 2^n)

Suite arithmétique

Définition : $U_{n+1}=U_n + R$ (R appelé **raison**)

Terme général : $U_n = U_0 + nR$

Lien entre rang n et rang p : $U_n = U_p + (n-p)R$

Somme partielle des n premiers termes $S_n = U_0+U_1+\ldots+U_{n-1} = \dfrac{n(U_0+U_{n-1})}{2}$

Cas particulier $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Relation 3 termes consécutifs $2U_{n+1} = U_n + U_{n+2}$

Convergence: Toujours divergente

Démonstration Sn = somme des n premiers termes de la suite

$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$

$S_n = U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots + U_0$

Or la somme des 2 termes qui sont au même rang dans le second membre de chacune de ces 2 équations est constante. $U_0 + U_{n-1} = U_1 + U_{n-2} = \ldots = U_{n-1} + U_0$

Donc si on ajoute les 2 équations on trouve $2S_n = n(U_0 + U_{n-1})$ d'où $Sn = \dfrac{n \text{ fois la somme du 1er terme et du dernier}}{2}$

Suite géométrique

Définition : $U_{n+1} = U_n.Q$ (Q appelé **raison)**

Terme général : $U_n = U_0.Q^n$

Lien entre rang n et rang p : $U_n = U_p.Q^{n-p}$

Somme partielle des n premiers termes $Sn=U_0+U_1+\ldots+U_{n-1} = U_0 \dfrac{Q^n-1}{Q-1}$

Cas particulier Factorisation de $1-x^n$ pour $x\neq1$ $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1} = \dfrac{1-X^n}{1-X}$

Relation 3 termes consécutifs $(U_{n+1})^2 = (U_n)(U_{n+2})$

Convergence: Converge vers **0** si **|Q|<1** . diverge si **|Q|>1**.

Démonstration Sn = somme des n premiers termes de la suite

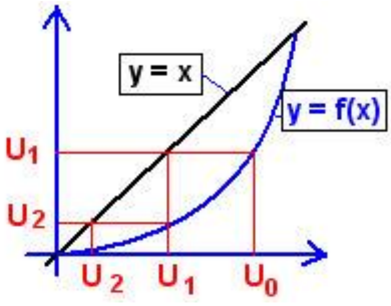
$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$

$Q.S_n = QU_0 + QU_1 + \ldots + QU_{n-1} = U_1+U_2+\ldots+U_n+QU_{n-1} = S_n - U_0 + U_0Q^n$ d'où $Q.S_n - S_n = U_0(Q^n-1)$ et ..

$Sn = \frac{Q^n-1}{Q-1}$

Interprétation graphique de la récurrence

Une suite est définie par récurrence quand on peut calculer U_{n+1} en fonction de U_n. $\mathbf{U_{n+1} = f(U_n)}$ **avec** $\mathbf{U_0 = a}$.
Cela implique de connaître la fonction f et on peut tracer le graphe de f(x).
Si on prend par exemple $U_{n+1}=(U_n)^2$ on identifie f(x) comme $f(x)=x^2$.



On trace le graphe de f(x) et le graphe de la droite y = x.
On part de $x=U_0$ (ici $U_0 = 0,8$).
Grâce à la courbe on cherche le point $U_1 = f(U_0)$ sur l'axe des y.
Puis grâce à la droite y = x on situe le point $x = U_1$ sur l'axe des x.
Et on recommence le processus, on cherche $U_2 = f(U_1)$ grâce à la courbe puis, grâce à la droite le point $x = U_2$.
Et ainsi de suite.
Ici U_n est positif et se rapproche de plus en plus de l'origine.
il semble que U_n converge vers 0.
Si U_0 avait été > 1 la suite aurait divergé.