Nombres et calculs

Table des matières

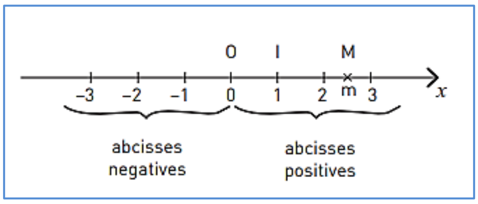
Les nombres relatifs

Définition et utilité: Les nombres relatifs sont des nombres comme les autres (entiers, décimaux, fractions, …) **sauf qu'ils peuvent être positifs ou négatifs** pour exprimer des quantités qui peuvent varier autour d'une référence appelée zéro, comme la température, l'état d'un compte en banque, les voitures qui rentrent ou sortent d'un garage, les niveaux d'un immeuble possédant un sous –sol etc.

Ecriture : Le signe – est obligatoire devant les nombres négatifs (–3 ; – 15,587, -– $\frac{4}{5}$; …)
Par contre on peut écrire les nombres positifs précédés ou non du signe + (+3 = 3 même nombre).

Opposé : **+ 3** et **– 3** sont dits opposés. +3 est l'opposé de – 3 et –3 est l'opposé de +3.
Tous les nombres ont un opposé si l'on considère que 0 est égal à son opposé.
Opposé de l'opposé de +3 s'écrit – (–3) ce nombre est +3. 2 signes – consécutifs se neutralisent.

Axe, abscisse d'un point.



On peut désormais représenter tous les nombres sur un axe orienté et gradué plus ou moins finement en fonction de nos besoins.
A gauche du zéro on trouve les nombres négatifs, à droite les nombres positifs. 2 nombres opposés sont à égale distance du 0.
Chaque point de l'axe représente désormais un nombre. Ce nombre s'appelle **l'abscisse** du point. Par exemple +2,5 est l'abscisse de M. Si A est un point de l'axe, la notation A(– 3) signifie que –3 est l'abscisse de A.

Comparaison de 2 nombres relatifs: De 2 nombre relatifs, le plus petit est celui qui se trouve le plus à gauche sur l'axe gradué. –10 < +2   –125 < –15   3 > – 50. Tout nombre négatif est plus petit que tout nombre positif.

Signe et distance au zéro. Tout nombre relatif a un signe (+ ou –) et une distance à zéro (le nombre débarrassé de son signe). Le signe de +3 est + sa distance à zéro est notée |+3| et égale à 3.
Signe de –5 : – et distance à zéro |–5| = 5.
2 nombres opposés ont des signes contraires et la même distance à zéro (on dit encore "même valeur absolue"). |–5| se lit "distance à zéro de –5".

Termes et facteurs: On appelle **termes** les chiffres ou expressions qui composent une somme.
On appelle **facteurs** les chiffres ou expressions qui composent un produit.

Pour additionner des nombres relatifs

S'ils sont de même signe	On ajoute les distances à zéro et on donne à la somme le signe commun	+2 + (+3) = + 5 – 4 + (– 2) = – 6
S'ils sont de signes opposés	On soustrait les distances à zéro et on donne à la somme le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro	+2 +(–5) = – 3 – 3 +(+8) = +5
Pour ajouter plus de 2 nombres	On ajoute les positifs entre eux (on trouve un partiel positif) On ajoute les négatifs entre eux (on trouve un partiel négatif) On ajoute le partiel positif et le partiel négatif.	+2+(–3) +(–4) +(+5) = **(+2) +(+5)** +**(–3)+(–4)** = **(+7)** **+** **(–7)** = 0
Pour soustraire un relatif	Pour soustraire un relatif il faut ajouter son opposé.	(+2)–(– 4)=+2+(+4)=+6 (+2) –(+3)=(+2)+(–3)= –1
Somme de 2 opposés	La somme de 2 opposés donne 0.	(–2) + (+2) = 0 (+2,5) + (–2,5) = 0
Simplification de l'écriture d'une somme.	Si vous lisez une suite de nombres relatifs non séparés par des signes d'opération comme 2 +5 –3 +4 –7 , en fait il s'agit de l'écriture simplifiée d'une somme. Cette écriture est équivalente à 2 **+**(+5) **+**(–3) **+**(+4) **+**(–7) . Simplement les **+** d'opération sont implicites. On ne les écrit pas.	

Pour multiplier ou diviser 2 nombres relatifs

Produit	La distance à zéro du produit est le produit des distances à zéro. Le signe du produit est + si les nombres sont de même signe. Sinon – .	(+2)x(+8)=+16 (–3)x(+4)= –12
Quotient	La distance à zéro du quotient est le quotient des distances à zéro. Le signe du produit est + si les nombres sont de même signe. Sinon – .	$\frac{-2}{-4}$= +0,5 $\frac{-1}{+3} = -\frac{1}{3}$
Simplification de l'écriture d'un produit	Pour éviter d'utiliser le signe X qu'on peut confondre avec la lettre x, on met les facteurs d'un produit entre parenthèses sans signe pour les séparer. Au lieu de (–4)X(+2) on peut écrire (–4)(+2) ou –4(+2) ou (-4)2. 3x est le produit de 3 par le nombre x.	

Règles et priorité des calculs

Les parenthèses servent à

- Associer les termes d'une somme (+2 –3 +7) La somme +2 + (–3) + (+7) est associée en un seul nombre.
  On peut remplacer la parenthèse par +6 qu'on met entre parenthèses si un signe la précède.
- Séparer les facteurs d'un produit (3)(–4,85) . +3 multiplié par –4,85. Produit de +3 par –4,85.
  On peut remplacer (3)(–4,85) par – 14,55 qu'on met entre parenthèses si un signe précède le produit.

Lecture des expressions complexes.

En fait les termes d'une somme peuvent être des produits
comme dans A = +2 +(–3)(+4) –7 →(–3)(+4) est le terme d'une somme. A est une somme.
Et les facteurs d'un produit peuvent être des sommes.
comme dans B= (2+3)(–5+7) → (2+3) et (5+7) sont les facteurs d'un produit. B est un produit.

Comment s'y retrouver?

- **Quand une parenthèse ouvrante est accolée à une parenthèse fermante, elles délimitent les facteurs d'un produit.** (2 –5)(6+4–3) produit de (2– 5) par (6 + 4 –3) autrement dit produit de –3 par +7.

- Il en va de même quand une parenthèse est directement accolée à un nombre sans signe intercalaire.
  2(3–5) → 2 est multiplié par (3–5). Attention dans 3 + 2(3–5) seul 2 est multiplié par (3–5). Pas 3 + 2.
  (3–5)2 → (3–5) est multiplié par 2 . Attention dans (3–5)2 + 7 seul 2 est multiplié par (3–5). Pas 2 + 7.
  Second facteur négatif: (3–5)(–2) produit de (3–5) par – 2. Mais (3–5) – 2 somme de (3–5) et de –2 .

- **Quand des parenthèses sont devancées ou suivies par un signe + ou – elles délimitent les termes d'une somme.** Comme dans +2 **+** **(**–3)(+4**)** **–**7

Exception du signe situé en début d'expression ou de parenthèse.

Un + situé en début d'expression ou de parenthèse de sert à rien
Si A = **+**(**+**3 –4 –5) + 7 on peut écrire A = (3 –4 –5) +7. On supprime les 2 + en rouge .
Par contre un – est toujours significatif. Situé devant une parenthèse c'est un moins d'opposition.
Il signifie qu'après avoir calculé l'expression entre parenthèses, il faudra en prendre l'opposé.
Si A = – (3–7) +4 il faudra remplacer –(3–7) par l'opposé de (3–7) c'est-à-dire +4 Donc A = 4 + 4 = 8

Suppression des parenthèses de somme précédées d'un + ou d'un –

Parenthèses de somme précédées d'un+ ou de rien.	On les supprime ainsi que le + qui précède la parenthèse et on garde tous les signes intérieurs à la parenthèse.	5+(–3 –7 +2) = 5 – 3 – 7 +2
Parenthèses de somme précédées d'un –	On les supprime ainsi que le – qui précède la parenthèse mais on change tous les signes intérieurs à la parenthèse.	5–(–4 +7 –2)= 5 +4 – 7 +2

Suppression des parenthèses de produit précédées d'un + ou d'un –

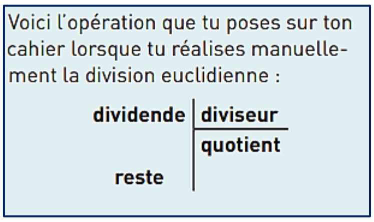
Il est conseillé dans un premier temps de mettre le résultat du produit entre parenthèses en conservant le signe qui précède le produit. Puis d'enlever ces parenthèses comme des parenthèses de somme.	3 **– (–5)(3+7)** = 3 **– (–50)** = 3 + 50 = 53

Priorité des calculs

Pour faire des calculs complexes.
1) On calcule en priorité le contenu des parenthèses (ou on les supprime quand c'est possible).
2) Au sein des parenthèses ou en leur absence on calcule le résultat des produits ou quotients avant les sommes.

Calculer A = 2 +**(4)(–7)** + 5 + (–5 – **(3)(–5)** +7). On repère produits ou quotients.
On commence par calculer (3)(–5) et (4)(–7) en mettant le résultat entre parenthèses.
A = 3 +(**–28**) +5 + (–5 –(**–15**) +7).
Ensuite on supprime les parenthèses qui entourent les produits 3 – 28 + 5 + **(–5 +15 +7)** .
On supprime les parenthèses de somme 3 – 28 + 5 **– 5 + 15 + 7** = 3 + 5 + 15 +7 – 28 – 5 = 30 – 33 = $\boxed{-3}$.
On pourrait aussi calculer d'abord le contenu de la parenthèse 3 –28 +5 **+ 17** = –28 + 25 = $\boxed{-3}$

Division, divisibilité, nombres premiers



Division euclidienne. C'est la division d'un nombre entier, appelé **dividende** par un autre nombre entier appelé **diviseur**.
On obtient un résultat entier appelé **quotient** et un reste entier **inférieur** au diviseur et qui peut être nul. Par exemple 105 : 4 = 26 , reste 1.
Ces 4 nombres sont liés par la relation dividende = diviseur x quotient + reste
Par exemple 105 = 4 x 26 + 1.

Diviseurs et multiples d'un nombre entier. Soient a et b, 2 nombres entiers. (b est non nul)
On dit que a est **divisible** par b (ou que b est un **diviseur** de a) si le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

Par exemple 105 est divisible par 5, par 21, par 7, par 3 , par 35 , par 15.

On dit que a est un **multiple** de b si a est divisible par b. Autrement dit il existe un entier m tel que a =b x m.
Pour trouver les multiples de 12, il suffit de multiplier 12 par 1, par 2, par 3, par 4, …. par tout entier naturel.

42, 63, 84, 105 sont des multiples de 21.

Critères de divisibilité

Divisible par		
2	si le nombre est pair (son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8)	12 ou 58
3	si la somme de ses chiffres est un multiple de 3	462 (4+6+2 =12 = 4x3)
4	si le nombre composé de ses 2 derniers chiffres est un multiple de 4	524 (24 = 4x6)
5	si son dernier chiffre est 0 ou 5	120 ou 85
6	s'il est divisible à la fois par 2 et par 3	144 (1+4+4= 9 =3x3 et 4)
9	si la somme des chiffres qui le composent est un multiple de 9	477 (4+7+7 = 18=2x9)
10	si son dernier chiffre est 0	1250
11	Si la somme des chiffres de rang impair moins la somme des chiffres de rang pair est 0 (ou un multiple de 11 pour les grands nombres).	154 → (1+4)-5 =0 1353→(1+5)-(3+3)=0

Nombres premiers. Un entier naturel est premier s'il a exactement 2 diviseurs 1 et lui-même
1 n'est pas premier (un seul diviseur). Les plus petits premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,…
2 est le seul nombre pair parmi les nombres premiers. Les autres sont impairs.

Décomposition en facteurs premiers. Si un nombre n'est pas premier il est divisible par d'autres chiffres que 1 et lui-même donc on peut le décomposer en un produit de facteurs premiers.
Par exemple 12 = 4 x +3 = 2 x 2 x 3.
Comment procéder? On utilise les critères de divisibilité pour trouver les 2 premiers facteurs, par exemple 105 = 21 x 5 , puis on décompose chaque facteur jusqu'à ce que tous les facteurs soient premiers :
105 = 21 x 5 = 7 x 3 x 5 tous les facteurs sont premiers.

Si un nombre a est divisible par b il est divisible par tous les facteurs premiers ou produit de facteurs premiers de b.

En effet a divisible par b soit q le quotient → a = b x q si p est un facteur premier de b (ou un produit partiel de facteurs premiers de b) il existe un entier n tel que b = p x n.
On peut donc écrire a = p x n x q = p x (n x q) autrement dit n x q est le quotient exact de a divisé par p.
Donc a divisible par p.

Si a est un multiple de b c'est aussi un multiple de tous les facteurs premiers ou produits de facteurs premiers de b.

Si a = b x m et que b = p x n on peut écrire a = p x n x m = p x (n x m) → a multiple de p.

Nombres premiers entre eux. 2 nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont pas de diviseur commun à part 1. Autrement dit dans leur décomposition en facteurs premiers il ne doit pas y avoir de facteur commun.
21 = 7x3 et **110** = 11x 5 x 2 sont premiers entre eux.
24 = 2x2x2x3 et **39** = 3x13 ne sont pas premiers entre eux (Ils sont tous les deux multiples de 3).

Fractions: comparaison et opérations

Rappels. Soient a et b deux nombre quelconques, (b non nul)
$\frac{a}{b}$ symbolise le résultat de la division de a par b .
Si a et b sont des entiers relatifs $\frac{a}{b}$ est **une fraction**, sinon c'est une écriture fractionnaire de la division.
Donc $\frac{2,5}{5}$ a un sens mais ce n'est pas une fraction. Tandis que $\frac{25}{50} = \frac{2,5}{5}$ est une fraction. Curieux non ?
Les nombres qu'on peut écrire sous forme d'une fraction s'appellent des **rationnels**.
On note $\mathbb{Q}$ leur ensemble. Les entiers, les décimaux et d'autres nombres sont des rationnels .
Mais certains nombres comme π (3,14…) ou le nombre qui multiplié par lui-même donne 2 sont des **Irrationnels**.

Multiplication et division d'une fraction par un entier.

On a vu en classe de 6^{e} que $\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$ et que $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \times c}$ (remarque: on peut écrire $\frac{a}{b} \div c$ ou $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$).
Or nous savons qu'un nombre ne change pas quand on le multiplie puis on le divise successivement par un même nombre. Donc $\frac{a \times c}{b \times c}$ étant $\frac{a}{b}$ que nous avons successivement multiplié par c puis divisé par c on peut en déduire que $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$. Réciproquement si a = n x q et b =p x q on peut écrire $\frac{a}{b} = \frac{n \times q}{p \times q} = \frac{n}{p}$.

Propriété importante: Une fraction ne change pas quand on multiplie ou qu'on divise son numérateur **et** son dénominateur par un même nombre.
Si on divise numérateur et dénominateur par un même nombre entier on dira qu'on simplifie la fraction.
Si on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre entier on dira qu'on complique la fraction.

Exemple de simplification : $\frac{105}{63} = \frac{3 \times 7 \times 5}{3 \times 7 \times 3} = \frac{5}{3}$ Exemples de complication $\frac{5}{3} = \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{10}{6}$ ou $\frac{7}{2} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} = \frac{21}{6}$

Réduction au même dénominateur.

$\frac{5}{3} = \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{10}{6}$ $\frac{7}{2} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} = \frac{21}{6}$ Cet exemple montre que pour réduire 2 fractions au même dénominateur, il suffit de compliquer chacune d'elle par le dénominateur de l'autre. Autrement dit:

Le produit des dénominateurs de plusieurs fractions constitue toujours un dénominateur commun possible pour ces fractions.

Mais ce n'est pas le plus petit. Pour trouver **le plus petit dénominateur commun**, il faut décomposer chaque dénominateur en produit de facteurs premiers puis former un produit minimal de facteurs premiers qui contiendra toutes les décompositions.
Par exemple si 10 et 14 sont 2 dénominateurs, on peut prendre 10 x14=140 comme dénominateur commun.
Mais comme 10=2x5 et 14=2x7, le produit 2X5X7 = 70 contient 2X5 et 2X7 et il est plus petit que 140.
Le plus petit dénominateur commun est le **plus petit commun multiple** (PPCM) des dénominateurs.

Comparaison: Pour comparer 2 fractions soit on les compare en tant que quotients après avoir effectué la division, soit on les réduit au même dénominateur et celle qui a le plus petit numérateur est la plus petite.
Comparer $\frac{3}{5}$ et $\frac{6}{11}$ On les réduit au même dénominateur $\frac{3}{5} = \frac{33}{55}$ et $\frac{6}{11} = \frac{30}{55}$ donc $\frac{3}{5}$ est la plus grande.

Opérations sur les fractions

Somme	Pour ajouter ou soustraire des fractions 1) On les réduit au même dénominateur. Ce sera le dénominateur de la somme 2) On ajoute ou soustrait les numérateurs pour trouver celui de la somme	$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$ $\frac{3}{4} - \frac{7}{8} = \frac{6}{8} - \frac{7}{8} = -\frac{1}{8}$
Produit	Pour multiplier 2 fractions 1) Le numérateur du produit est égal au produit des numérateurs 2) Le dénominateur du produit est égal au produit des dénominateurs	$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$ $\left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{7}{5}\right) = -\frac{21}{20}$
Inverse	L'inverse d'un nombre a ≠ 0 est le nombre a' tel que a x a' =1. L'inverse de a est $\frac{1}{a}$ Par exemple l'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$ (ou 0,5) puisque 2 x $\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$. L'inverse d'une fraction non nulle $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ puisque $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$ Remarquons qu'il est équivalent de diviser par b ou de multiplier par l'inverse de b puisque $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$	
Quotient	Pour diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{x}{y}$ il faut multiplier $\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{x}{y}$ autrement dit par $\frac{y}{x}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

Carrés et racines carrées

Définition et principales propriétés:

Le carré d'un nombre est ce nombre multiplié par lui-même a x a. On le note a^2 qu'on lit "a carré".
2 est appelé exposant de a.
En tant que produit de 2 nombres de même signe, un carré est toujours positif ou nul.

Par exemple 5^2 = 5 x 5 = 25 ou $(-3)^2 = (-3)(-3) = +9$ Notez que pour élever un nombre négatif au carré il faut le mettre entre parenthèses. -3^2 serait l'opposé de 3^2, c'est-à-dire –9 alors que le carré de –3 est +9.

Il est utile de savoir reconnaître au moins les 10 premiers carrés:

Le nombre ...	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**	121	144	169	196	125
est le carré de ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

La racine carrée d'un nombre a positif ou nul:

La racine carrée de a est le nombre positif qui élevé au carré donne a.

On le note $\sqrt{a}$ qu'on lit "racine de a". Le symbole $\sqrt{\ }$ est un **radical.**

Attention, il y a 2 nombres qui élevés au carré donnent 4. Ce sont – 2 et +2 . $\sqrt{4}$ est le nombre positif: +2.
De la définition on tire :

$\sqrt{a}$ n'existe que si a est positif ou nul.	$\sqrt{a}$ est positif.	$(\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a})(\sqrt{a}) = a$	$\sqrt{(a^2)} = a$

Quelques exemples: $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$; $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ (irrationnel); $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

Opérations sur les racines:

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Exemples: $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$ $\qquad \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{\frac{4 \times 7}{7}} = \sqrt{4} = 2$

Attention! Aucune loi ne permet d'opérer sur une somme ou différence de racines. $\cancel{\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}}$ faux.
Par contre on peut écrire par exemple que $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ sans toucher au radical.

Règles d'écriture $5\sqrt{2}$ = produit de 5 par $\sqrt{2}$. $(2+\sqrt{3})\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}\,(2+\sqrt{3})$ = produit de $(2+\sqrt{3})$ *par* $\sqrt{2}$
$5 + \sqrt{2}$ ou $\sqrt{2} + 5$ = somme de 5 et $\sqrt{2}$. Mais $\sqrt{2+5}$ = racine de 7.

On a intérêt à "sortir les carrés du radical".

Si en décomposant **a** en facteurs on trouve $a = b^2c$ on peut écrire $\sqrt{a} = \sqrt{b^2c} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{c} = b\sqrt{c}$.
On a sorti b^2 du radical.
Dans de nombreux cas la décomposition en facteurs premiers de a sous le radical nous permet de trouver les facteurs en double, c'est-à-dire les carrés, et de les sortir $\sqrt{98} = \sqrt{7 \times 7 \times 2} = 7\sqrt{2}$.

A quoi ça peut servir? $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ est une expression assez moche mais en sortant le 4 et le 25 de sous les racines on trouve $\sqrt{12} + \sqrt{75} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ c'est déjà mieux.
Si par exemple on doit simplifier $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ on va trouver $\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ = 7. C'est quand même mieux non?

Résoudre une équation de type $x^2 = a$

Déjà si a est négatif ($X^2 = -7$) on peut dire que l'équation n'a pas de solution puisque x^2 est toujours positif.
Si a est nul ($X^2 = 0$) on a une seule solution X = 0.
Et si a est positif ($X^2 = 7$) Attention on a 2 solutions $X = \sqrt{7}$ et $X = -\sqrt{7}$

Puissances

Définition:

Soit n un nombre entier positif et a un nombre quelconque:
a puissance n noté **a^n** est le produit de n facteurs égaux à a. $\boxed{a^n = a \text{x} a \text{x} a \text{x} \ldots \text{x} a}$ (n facteurs)
n est **l'exposant de a**
Si l'exposant est un entier négatif $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$
Par convention $\mathbf{a^0 = 1}$ Par définition $\mathbf{a^1 = a}$ et $\mathbf{a^{-1}} = \frac{1}{a}$ l'inverse de a

Exemples	$2^3 = 2\text{x}2\text{x}2 = 8$	$58^0 = 1$	$(-3)^3 = -27$	$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$	$(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$

Remarque1 pour élever un nombre négatif à la puissance n on le met entre parenthèses. $(-2)^2 = 4$ | $-2^2 = -(2^2) = -4$
En effet, il faut pouvoir différencier "le nombre – 2 élevé au carré" et "on élève 2 au carré et on en prend l'opposé"
Si l'exposant n'est pas précédé d'une parenthèse, il porte sur le nombre qui le précède sans son signe.
Remarque 2: Si n est pair ou a positif a^n est positif. Si n est impair et a négatif a^n est négatif.

Puissances de 10.

Particulièrement utiles.
10^n = 1 suivi de n zéros. Par exemple 10^6 = 1 suivi de 6 zéros = 1000000 (un million)
$\mathbf{10^{-n}} = \frac{1}{1 \text{ suivi de n zéros}}$ soit 1 dixième, 1 centième, 1 millième etc. Par exemple 1 millième = 10^{-3}
On peut dire également que 10^{-n} est 0 suivi d'une virgule suivi de n–1 zéros suivis de 1. 10^{-3}= 0, 001.

Opérations sur les puissances:

a et b sont des nombres quelconques, n et p sont des entiers

$a^n \times a^p = a^{n+p}$	(n facteur a) x (p facteurs a) = n+p facteurs a	$5^2 \text{ x } 5^3 = 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x} 5 = 5^5$ $2^2 \text{ x } 2^3 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x} 2 = 2^5$
$(a^n)^p = a^{n \times p}$	p fois n facteurs a = n x p facteurs a	$(2^3)^2 = (2\text{x}2\text{x}2)(2\text{x}2\text{x}2) = 2^6$ $(0{,}3^4)^5 = 0{,}3^{20}$
$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	On simplifie $\frac{n \text{ facteurs } a}{p \text{ facteurs } a}$ = il reste n –p facteurs	$\frac{7^3}{7^5} = \frac{7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2} = 7^{3-5}$
$a^n \times b^n = (a \times b)^n$	(n facteurs a) X (n facteurs b) = n facteurs axb	$5^2\text{x}7^2 = 5\text{x}5\text{x}7\text{x}7 = 5\text{x}7\text{x}5\text{x}7) = (5\text{x}7)^2$
$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$	n facteurs $\frac{a}{b} = \frac{n \text{ facteurs } a}{n \text{ facteurs } b}$	$(\frac{5}{7})^3 = \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{5 \times 5 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{5^3}{7^3}$

Notation scientifique:

Utilisée par les calculatrices et les scientifiques quand un chiffre est trop grand ou trop petit.
Dans cette notation les nombres s'écrivent **$a\text{x}10^n$** avec **a décimal** tel que **$1 \leq a < 10$** et **n entier relatif**
Par exemple 123456789 peut s'écrire 1,23456789 x 10^8
0,000000000005869 peut s'écrire 5,869 x 10^{-12}
$\boxed{a}$ est l'écriture décimale du nombre dans laquelle on a déplacé la virgule après le premier chiffre significatif.
$\boxed{n}$ est le nombre de rangs dont on a déplacé la virgule depuis l'écriture décimale pour obtenir a.
n est positif si la virgule est déplacée vers la gauche, n est négatif si elle est déplacée vers la droite.

Pour traduire un nombre de la notation scientifique vers l'écriture décimale,
A partir de a, il suffit de déplacer la virgule de n rangs vers la gauche (n négatif) ou vers la droite (n positif) éventuellement en ajoutant devant ou derrière le nombre les zéros significatifs dont on a besoin pour mettre la virgule là où elle doit être.
$2{,}57.10^{-5}$ je déplace la virgule de 5 rangs vers la gauche en écriture décimale 0,0000257
$2{,}57\ 10^6$ je déplace la virgule de 6 rangs vers la droite en écriture décimale 2570000

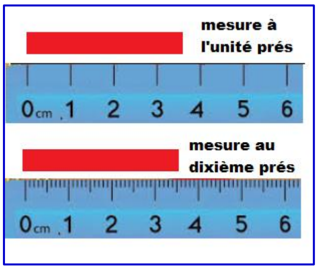
Valeur approchée, encadrement, arrondi, troncature.

Ordre de grandeur

Je fais une opération compliquée, je trouve un résultat R.
Je remplace les termes ou les facteurs de mon expression par des nombres plus simples et proches.
Je fais l'opération de tête avec les arrondis. Je trouve un résultat A.
A est un ordre de grandeur que je peux comparer à R pour savoir si mon résultat est viable.

Par exemple je viens de faire l'opération suivante 189,25 x 4,68 j'ai trouvé 88,569
Or 189,25 c'est presque 200 et 4,68 c'est presque 5 donc je dois trouver un nombre de l'ordre de 200 x 5 =1000. Je trouve moins de 100 il me faudrait trouver un peu moins de 1000 donc mon résultat est probablement faux. Je refais l'opération je trouve 885,69. Ce devrait être le bon résultat.

Encadrement d'un nombre.



Encadrer un nombre x c'est le placer entre un nombre a plus petit et un nombre b plus grand. On écrit a < x < b.
Encadrer à l'unité prés c'est quand a et b sont 2 entiers consécutifs.
Par exemple 3 < x < 4.
Encadrer au dixième prés c'est quand a et b sont 2 dixièmes consécutifs.
Par exemple 3,5 < x < 3,6.

Les nombres a et b sont les bornes de l'encadrement. La différence entre borne haute et borne basse de l'encadrement est son amplitude. 1 pour un encadrement à l'unité. 0,1 pour un encadrement au dixième.
Encadrement au centième prés de x = 28,587 ? → **28,58**7 → **28,58** < x < 28,59
Encadrement au dixième prés de x = 0,3879 ? → **0,3**879 → 0,3 < x < 0,4

Valeur approchée

Une valeur approchée d'un nombre x est une valeur proche du nombre.
Si elle est plus petite que x elle est approchée par défaut,
Si elle est plus grande que x elle est approchée par excès.
Les valeurs approchées de x à l'unité prés ou au dixième prés sont les bornes de l'encadrement de même amplitude. Borne basse approchée par défaut. Borne haute approchée par excès.
Par exemple les valeurs approchées au dixième prés de x = 3,453 sont 3,4 (par défaut) et 3,5 (par excès).

Troncature.

La troncature d'un nombre est le début de son écriture décimale jusqu'à un chiffre donné.
Troncature à l'unité de 14,5789 = 14
Troncature au dixième de 14,5789 = 14,5
Troncature au centième de 14,5789 = 14,57.

Arrondi

L'arrondi à l'unité, d'un nombre x est la borne de son encadrement à l'unité qui en est le plus proche.
On définit de la même manière un encadrement au dixième, au centième, au millième, … en considérant l'encadrement de même amplitude.
Pour déterminer l'arrondi d'un nombre x la règle est la suivante :
On examine la décimale suivant celle de l'encadrement.
Par exemple on examine le chiffre des centièmes si on arrondit au dixième.
Si cette décimale est 0, 1, 2, 3, 4 on prend pour arrondi la borne inférieure de l'encadrement.
Si cette décimale est 5, 6, 7, 8, 9 on prend pour arrondi la borne supérieure de l'encadrement.

Exemples: Quel est l'arrondi au dixième de x = 125,349?
L'encadrement au dixième de x est 125,3 < x < 125,4. Quelle borne est la plus proche de x? 125,3 ou 125,4?
Le chiffre suivant les dixièmes est 4 (125,3**4**9). Donc on prend la borne inférieure. L'arrondi cherché est 125,3.

Arrondi au centième de 125,349?	Encadrement 125,34<x<125,35	chiffre des millièmes 9	donc arrondi 125,35
Arrondi à l'unité de 58,57 ?	Encadrement 58 < x < 59	chiffre des dixièmes 5	donc arrondi 59.

Multiples et sous multiples des unités de mesures

On sait que par exemple un hectolitre = 100 litres et un hectomètre = 100 mètres.
Les multiples ou sous-multiples les plus usuels d'une unité de mesure nous sont connus mais pas ceux qui servent à mesurer de très grandes ou très petites quantités.
Le principe est toujours le même on choisit une unité de référence : le mètre, le gramme, la seconde, le watt (puissance électrique d'un appareil) et on lui accole un préfixe qui nous renseigne sur le nombre d'unités de références qu'il faut pour égaler celle que nous utilisons. Ces préfixes quels sont – ils?

Multiples de l'unité de mesure

Nombre d'unités	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10
Préfixe	Terra	Giga	Méga	Kilo	Hecto	déca
Symbole	T	G	M	K	H	da

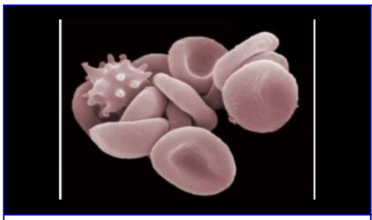
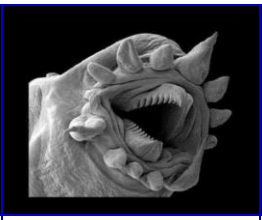
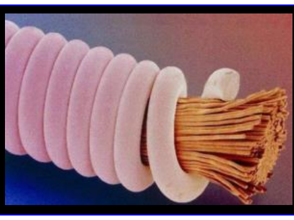
Par exemple en informatique l'unité de référence de la mémoire est l'octet qui vaut 8 bits (groupement de 8 chiffres mémorisés qui ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1). Avec un octet on peut mettre en mémoire une lettre de l'alphabet ou un caractère du clavier ou stocker un tout petit morceau d'image, de musique ou de vidéo).
Le symbole de l'octet est O.
1 MO se lit 1 méga octets et contient 1 million d'octets.
1 GO se lit 1 giga octets et contient 1 milliard d'octets.
Certains disques durs contiennent 1 TO et plus. 1 terra octets de mémoire = mille milliards d'octets.

Attention, en anglais octet se traduit par byte. Giga byte = Giga octets.
Donc d'après ce qu'on peut lire sur ce disque sa capacité est 512 GO
et son taux de transfert, qui conditionne la rapidité des échanges entre mémoire vive (RAM) et mémoire de masse, 95 MO (méga octets) par seconde.
La RAM est la mémoire de travail de l'ordinateur, la mémoire qu'il utilise quand il travaille, (2 à 8 GO) tandis que sa mémoire de masse plus importante est sa mémoire à long terme où il stocke tout ce qui pourra lui servir un jour (programmes, photos, textes, vidéos, morceaux de musique ….)

Sous multiples de l'unité

Nombre d'unités	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
Préfixe	déci	centi	milli	micro	nano	pico
Symbole	d	c	m	µ	n	p

Le pouvoir de résolution d'un microscope électronique, la dimension des détails les plus petits qu'on peut distinguer grâce à lui, est de l'ordre de 5 pm ou moins.
1 pico mètres c'est mille milliards de fois plus petit qu'un mètre.
Voici quelques images qu'il peut nous montrer sans forcer.
En fait avec l'aide de quelques techniques adéquates, on peut compter les atomes !

				
globules sanguins et virus	Ver d'eau chaude	grains de sable	Corde de guitare	Une puce

Les règles du calcul littéral

Le calcul littéral permet de remplacer, dans les expressions numériques, les nombres par des lettres dont on ne connait pas la valeur numérique à priori. Dans ce qui suit on suppose que les lettres a, b, c …x, y, z. représentent des nombres. Voici quelques règles permettant de comprendre les expressions littérales.

R1 Une lettre peut remplacer un nombre positif, négatif ou nul.

Si a représente un nombre, – a est son opposé et si a est non nul $\frac{1}{a}$ est son inverse. –a peut être positif.

3x est le produit de 3 par x. **ab** = produit de a par b. On écrit **x** et non 1x. **–x** et non –1x. **x²** et non xx

R2 Ecriture des produits simples

Nombre multiplié par nombre	Lettres multipliées par lettres					Lettres multipliées par nombre			
On remplace 3(4) par 12.	ab	xy	x^2	x^2y^3	b(–a)	3a	–4b	$5x^2$	nombre en premier

R3 Autant que possible, on évite d'utiliser les symboles multiplié (X) et divisé (÷)

On évite	3Xa	3X4	aXb	(a+b)X3	(a+5)X(x+7)	5x ÷(2x+3)
On recommande	3a	3(4) ou (3)(4)	ab	3(a+b)	(a+5)(x+7)	$\frac{5x}{2x+3}$

R4 contraction des signes, grâce à la règle des signes, au profit du signe initial

On évite	+(+a)	+(–a)	–(+a)	–(–a)	+3(–b)	+(5x+3)(-7)	$-\frac{-b}{-4}$	3x(–x)	b(–a)	–b(–a)
On recommande	+a	–a	–a	+a	–3b	– 7(5x+3)	$-\frac{b}{4}$	$-3x^2$	–ab	+ab

R5 Importance des parenthèses. Ne pas confondre…

(-x)² on élève opposé de x à la puissance 2 et **–x²** on élève x à la puissance 2 et on en prend l'opposé

(3x+2)(5y +2) on multiplie (3x+2) par (5y+2) et **3x+2(5y+2)** on multiplie 2 par (5y+2) et on ajoute 3x

Dans le même genre ne pas confondre (3x+2)(5y+2) et (3x+2)5y +2, ne pas confondre (x+2)(–3) et (x+2)–3

R6 Règles pour enlever les parenthèses de somme

+ devant une parenthèse : Il disparait avec les parenthèses. On conserve tous les signes intérieurs.

$7 +(-\ 2x -3 +x^2\ ) \quad = \quad 7 -2x -3 + x^2$

– devant une parenthèse: Il disparait avec les parenthèses. On change tous les signes intérieurs.

7 – (2x +9 –3y) = 7 – 2x –9 +3y (2x devient –2x)

R7 Pour enlever les parenthèses de produit : règle de **la distributivité**.

La seule façon d'enlever les parenthèses d'un produit est de le développer.

Comment développer par exemple a(b + 4 –d) ou (–3 +x) (2x +7) ?

■ **Pour multiplier un nombre par une somme**, on le distribue en tant que facteur sur tous les termes de la somme <u>en respectant la règle des signes</u>: **a distribué sur b =+ab**, **a sur –b = – ab**, **–a sur b = – ab**, **–a sur –b = +ab**

La distribution de a en tant que facteur sur la somme (b+c–d) est illustrée par le schéma ci – dessous:

a (b + c - d)	a → b + a → c - a → d	ab + ac - ad

Pour distribuer un facteur on commence par chercher le signe, on l'écrit, puis on multiplie lettres ou nombres.

5(3x –7) → ■ 5 par 3x signe + suivi de 15x = **15x** ■ 5 par –7 signe – suivi de 35 = **–35**. ■ Au total **15x –35**.

■ **Pour distribuer une somme sur une somme**, on distribue chaque terme de la 1ere somme sur chaque terme de la 2eme.

$\boxed{(a - b)(-c + d + e) = \mathbf{-ac + ad + ae} + bc - bd - be}$

En rouge la distribution de a sur (–c + d +e) en bleu la distribution de –b sur (–c + d +e) .

(**2 – 3x**)(5x –7) **=** **10x – 14** **$-15x^2$ +21x**

R8 On réduit une expression en sommant les nombres purs et les termes homogènes c'est-à-dire comportant les mêmes lettres aux mêmes exposants.

3 +5x –7 + $9x^2$ **–2x = (3 –7)** +**(5x –2x)** + $9x^2$ **= – 4 + 3x** $+9x^2$ expression réduite

(x +3)(x–4) **=** x^2 – 4x +3x –12 **=** x^2 –x –12 expression réduite

Factoriser une somme

Après développement, les termes d'une somme sont soit des nombres, soit des produits d'un nombre par une ou plusieurs lettres à des exposants quelconques. Par exemple $S = 9x + 12 + 5xy - 3x^2$.
Le nombre s'appelle **le coefficient** du terme. Par exemple 9 est le coefficient de 9x.

Factoriser une somme vise à la transformer en produit. Pour cela il existe 2 techniques

1. La mise en facteur commun.

Elle consiste à chercher dans plusieurs termes d'une somme un diviseur commun D.
Si par exemple x = mD et y = nD on peut écrire que **x + y = mD + nD = D (m+n)** on a factorisé la somme.

Pour cela, le plus simple est de regarder chaque coefficient comme le produit de ses facteurs premiers et chaque lettre comme un facteur supplémentaire.
Par exemple on peut décomposer $12x^2y$ en 3(2)(2)xxy. Si la décomposition d'un autre terme de la somme contient un facteur 3, 2, x, ou y, nous avons trouvé un facteur commun.

Faisons quelques essais:
■ $S = 21xy^2 + 49yz = 3(7)yyx + 7(7)yz$. Les facteurs communs sont **7y.** Donc $S = 7y(3yx + 7z)$
En rouge les facteurs communs, en bleu les facteurs complémentaires qui forment le second facteur.
■ $S = 5x - 15y = 5x - 3(5)y = 5(x - 3y)$
■ $S = -6a^2bz - 15ayz - 9a^3xz = -3(2)aabz\ -3(5)ayz\ -3(3)aaaxz = -3az(2ab + 5y + 3a^2x)$
Quand on met un nombre négatif en facteur tous les signes changent dans la parenthèse des compléments.
■ Plus compliqué S = 3 +a +6b + 2ba . Il n'y a pas de facteur commun aux 4 termes comment faire?
On remarque que si on met 2b en facteur dans 6b +2ab on obtient S = 3 + a + 2b(3+a) et à ce stade on peut considérer S comme la somme de 2 termes (3+a) + 2b(3+a) dans lesquels on peut mettre 3+a en facteur: S = (3+a)(1 + 2b).
Remarque si on doit mettre tout un terme en facteur son complément est 1: 3x + 6xy = 3x(**1** + 2y).

2. Les identités remarquables

On apprend à reconnaître les formes développées suivantes qui correspondent à des formes factorisées particulières :

$a^2 + b^2 + 2ab$	$= (a+b)(a+b)$	ou	$(a+b)^2$
$a^2 + b^2 - 2ab$	$= (a-b)(a-b)$	ou	$(a-b)^2$
$a^2 - b^2$	$= (a+b)(a-b)$		

On remarque que les formes développées sont composées des carrés de 2 nombres a^2 et b^2.
Eventuellement accompagnés de leur double produit 2ab.
Quant aux formes factorisées il s'agit de toutes les combinaisons possibles des facteurs (a+b) et (a–b).

Donc si on remarque dans une expression l'une de ces 3 formes développées, on peut l'identifier à la forme factorisée correspondante, ce qui revient à mettre une somme en facteur.
Il nous faut donc chercher…
Dans une somme de 3 termes, 2 carrés et un double produit
Dans une somme de 2 termes une différence de carrés.

$S = a^2 + 4ab + b^2$ On a bien (carré de a)+ (carré de b) mais le double produit serait 2ab pas 4ab.
$S = 4a^2 + 4ab + b^2$ = (carré de 2a) + (carré de b) + (2 fois 2a multiplié par b) forme $■^2 + △^2 + 2■△$ donc $S = (2a+b)^2$.
$S = 9a^2 - 16y^2$ = (carré de 3a) – (carré de 4y) on reconnait la forme $■^2 - △^2$ donc $S = (3a-4y)(3a + 4y)$
$S = 9 + x^2 - 6x$ = (carré de 3) + (carré de x) – (2 fois 3 par x) on reconnait $■^2 + △^2 - 2■△$ donc $S = (3-x)^2$.
$S = 4 - a^2 + 4a$ = (carré de 2) – (carré de a) + (2 fois 2 par a) → ça ne va pas il faudrait $+ a^2$ et pas $- a^2$.
$S = -x^2 - y^2 - 2xy$ Pas de concordance avec nos formules sauf si nous écrivons $S = -(x^2 + y^2 + 2xy) = -(x+y)^2$

Equations, inéquations

Equations

La forme générale d'une équation du 1er degré est **ax +b = cx +d** où a,b,c,d sont des nombres tels que l'un au moins des nombres a ou c est non nul, et **x est** l'inconnue. Un exemple : **4x +7 = 2x +11**.
L'expression qui figure à gauche du signe **=** s'appelle le **1ᵉʳ membre**. A droite le **second membre**.
Pour résoudre une équation, il faut la transformer selon des règles précises jusqu'à obtenir une équation de type **x = s** où **s** est un nombre appelé **solution**. L'équation donnée en exemple admet **2** pour solution.
La solution étant x = 2 , si on remplace x par 2 dans l'équation initiale, l'égalité sera vérifiée.

Méthode de résolution étape 1

Pour passer de la forme **4x +7 = 2x + 11** à la forme **x = s** , il faut d'abord regrouper les termes en x dans le premier membre et les termes sans x dans le second membre. Pour cela on va utiliser la loi suivante:

Si x est solution de l'équation **A = B**, (A et B étant des expressions en x)
x est aussi solution de l'équation **A +C = B +C** où C est une expression numérique quelconque.

Il suffit d'ajouter –7 aux deux membres et notre équation devient 4x + 7 –7 = 2x +11 –7 ou **4x = 2x +4**
Ensuite on ajoute – 2x aux deux membres et on a 4x –2x = 2x –2x +4 ou après réduction **2x = 4**

Méthode de résolution étape 2

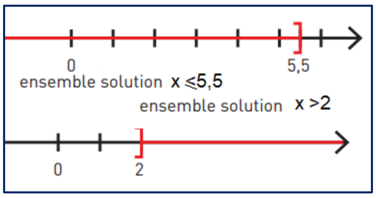
Une fois qu'on en est à la forme réduite, il faut trouver un moyen de séparer x de son coefficient (ici 2).
C'est là qu'intervient la seconde loi.

Si x est solution de l'équation **A = B**, (A et B étant des expressions en x)
x est aussi solution des équations **AC= BC** et $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ où C est une expression numérique non nulle.

Il suffit donc de diviser les 2 membres de l'équation **2x = 4** par 2 et on obtient $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ soit **x = 2**.
C'est la solution cherchée.

Inéquations

Une inéquation du premier degré a la forme générale **ax + b < cx + d** où a,b,c,d sont des nombres quelconques pourvu que soit a, soit c soit différent de 0. Au lieu de **<** on pourrait trouver **≤** ou **>** ou **≥**



Et la solution sera une inéquation de type **x < s** ou **x > s** c'est-à-dire un ensemble de valeurs. On voit ci-contre un croquis illustrant 2 ensembles solutions. Ici, x est donc plutôt une **variable** qu'une inconnue. (Puisqu'elle peut prendre une infinité de valeurs dans le cadre d'une solution).
La forme de la solution pourrait être x <3 ou x ≤ – 6 ou x ≥ 2,5 ou x> $\frac{1}{3}$

Les lois pour isoler x dans le premier membre sont pratiquement les mêmes que pour les équations

Si x est solution de l'inéquation **A < B**, (A et B étant des expressions en x)
x est aussi solution de l'équation **A +C < B +C** où C est une expression numérique quelconque.
x est aussi solution des inéquations **AC< BC** et $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$ où C est une expression numérique **positive**
Mais si **C est négatif** x est solution de **AC > BC** et $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ (on change le sens de l'inéquation).

–B| < –A | |0 A| < B|

Donc pour atteindre la forme réduite **nx < p** (où n et p sont des nombres, n non nul) on procède comme pour les équations. Puis à ce stade …
Si n est positif on procède encore comme pour les équations **x <** $\frac{p}{n}$.
Mais **si n est négatif** quand on divise les 2 membres par n on change le sens de l'inéquation **x >** $\frac{p}{n}$
Donc si la forme réduite est 3x **<** 8 la solution est x **<** $\frac{8}{3}$.
Mais si la forme réduite est –3x **<** 8 la solution est x **>** $-\frac{8}{3}$

Vous trouverez à la rubrique "animations" du site une méthode de résolution équivalente à celle- là.